ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ:
НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Інформаційно-комунікаційні технології в освіті
УДК 37.02:37.04:377
DOI https://doi.org/10.5281/zenodo.16932681

Розробка методичної стратегії з використанням GeoGebra, адаптованої до специфіки ЗНО/НМТ для навчання розв'язуванню задач з параметром

Зіновєєв Ігор Валерійович
кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики, Запорізький національний університет,
вул. Університетська, 66, м. Запоріжжя, 69011, Україна,
https://orcid.org/0000-0002-7392-2327

Манько Наталія Іванівна-Володимирівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, Запорізький національний університет,
вул. Університетська, 66, м. Запоріжжя, 69011, Україна,
https://orcid.org/0000-0001-8995-7316

Прийнято: 11.08.2025 | Опубліковано: 23.08.2025

Анотація: *Аналіз умов іспитів, які складають випускники шкіл для вступу до закладів вищої освіти в Україні (ЗНО/НМТ) та офіційних висновків про результати проведення ЗНО/НМТ останніх років дозволяє зробити наступні висновки, що найскладнішими для учасників, як ЗНО, так і НМТ виявились завдання з розгорнутою відповіддю, які належать до завдань найвищого когнітивного рівня та зазвичай відносяться до задач підвищеної складності, зокрема задачі з параметром, задачі комбінаторики, задачі стереометрії.*

Представлений в роботі стислий аналіз літературних та інтернет джерел свідчить про актуальність проблематики розробки та впровадження методичних підходів до викладання розділів шкільної математики, що включають завдання підвищеного рівня складності та задачі з параметром.

Метою даної роботи є розробка підходу до навчання розв'язувати задачі з параметрами з системним використанням візуалізацій, отриманих засобами GeoGebra, що враховує досвід ЗНО/НМТ з математики останніх років, та може бути основою для аналізу задач в ході колективної роботи «учень-учитель», індивідуального опрацювання матеріалу або самостійного дослідження.

У дослідженні представлено методичну стратегію навчання розв'язуванню задач з параметром, що ґрунтується на принципі поетапного опрацювання задач з параметрами через використання інтерактивних цифрових демонстраційних моделей, побудованих у GeoGebra, адаптованих до специфіки математичних завдань ЗНО/НМТ останніх років.

Наведена схема поетапної роботи з задачами з параметром супроводжується методичними коментарями щодо діяльності учителя та учнів із використанням демонстраційних GeoGebra моделей на кожному етапі. Усі етапи запропонованої схеми продемонстровано на прикладі розв'язання завдання з основної сесії ЗНО 2021 р.

Аналіз практичного застосування GeoGebra в освітній діяльності профільних навчальних закладів показує, що формування інтерактивних візуальних представлень для математичних задач підвищеної складності засобами цієї системи в процесі підготовки до НМТ виступає потужним інструментом розвитку дослідницької та інноваційної діяльності здобувачів освіти.

***Ключові слова**: ЗНО/НМТ, задачі підвищеної складності, задачі з параметром, методична стратегія, інформаційно-комунікаційні технології, GeoGebra, інтерактивна візуалізація, демонстраційна модель, діяльність учнів.*

Development of a methodological strategy using GeoGebra, adapted to the specifics of the EIT/NMT for learning to solve problems with parameters

Zinovieiev Ihor

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of General Mathematics, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, https://orcid.org/0000-0002-7392-2327

Manko Nataliia

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, https://orcid.org/0000-0001-8995-7316

Abstract: *An analysis of the content of the exams taken by school graduates for admission to higher education institutions in Ukraine (EIT/NMT) and official reports on the results of the EIT/ NMT over the years allows us to make the following conclusions: the most difficult tasks for participants in both the EIT and NMT were those requiring detailed answers, which belong to the highest cognitive level and are usually considered to tasks of increased complexity, in particular problems with parameters, combinatorics problems, and stereometry problems.*

The concise analysis of scientific and online sources presented in this paper demonstrates the relevance of developing and implementing methodological approaches to teaching school mathematics sections that include problems of increased complexity and problems with parameters.

The aim of this paper is to develop an approach to learning how to solve problems with parameters using GeoGebra visualizations, taking into account the experience of recent years EIT /NMT mathematics exams, and can be used as a basis

 ISSN: 2786-9458

for analyzing problems during collective "student-teacher" work, individual study of the material, or individual research.

The research represents a methodological strategy for learning how to solve problems with parameters, based on the principle of step-by-step processing of problems with parameters through the use of interactive digital demonstration models created in GeoGebra, adapted to the specifics of recent years EIT/NMT mathematical problems.

The proposed step-by-step scheme for working with problems involving parameters is accompanied by methodological comments on the activities of teachers and students using GeoGebra demonstration models at each stage. All stages of the proposed scheme are demonstrated using the problem from the main session of the 2021 External Independent Testing (EIT).

An analysis of the practical application of GeoGebra in the educational activities of specialized educational institutions shows that the formation of interactive visual representations for mathematical problems of increased complexity using this system in the process of preparing for the NMT is a powerful instrument for the development of research and innovative activities of students.

***Keywords**: EIT/NMT, problems of increased complexity, problems with parameters, methodological strategy, information and communication technologies, GeoGebra, interactive visualization, demonstration model, student activities.*

Постановка проблеми. Аналіз умов іспитів, які складають випускники шкіл для вступу до закладів вищої освіти в Україні (ЗНО/НМТ) та офіційних висновків про результати проведення ЗНО/НМТ 2020-2024 років [1] дозволяє зробити наступні висновки, що найскладнішими для учасників, як ЗНО, так і НМТ виявились завдання з розгорнутою відповіддю, які належать до завдань найвищого когнітивного рівня та зазвичай відносяться до задач підвищеної складності, зокрема задачі з параметром, задачі комбінаторики, задачі стереометрії.

Розв'язання цих задач потребує не лише знаходження множини розв'язків заданого рівняння, або системи рівнянь залежно від значень сталої a, а й ґрунтовного аналізу та на його основі, синтезу результатів.

Аналіз результатів проведення ЗНО/НМТ 2020-2024 років [1] свідчить про те, що близько третини від загальної кількості випускників взагалі не спробували розв'язати завдання з розгорнутою відповіддю, близько двох третин не отримали жодного балу, й дуже малий відсоток учасників успішно впорались з цими завданнями. При виконанні, наприклад, завдань з параметром спостерігаємо наступні результати – відсоток учасників, що повністю виконали завдання складали 1,9 % – 2020 р., 0,2 % – 2021 р., 22, 4% – 2023 р., 0,7% – 2024 р. [1].

Таким чином, виникає необхідність розробки системи навчання розв'язанню задач такого типу, що підвищить мотивацію учнів і зробить навчальний процес ефективнішим, забезпечить формування та розвиток необхідних математичних компетентностей.

Одним з таких підходів може бути створення інтерактивних демонстраційних комп'ютерних моделей-презентацій до навчального матеріалу за зазначеними вище темами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблематика викладання задач з параметром привертає увагу широкого кола дослідників, як в Україні так і за кордоном, що знайшло відображення у великій кількості публікацій, зокрема останніх років, серед яких навчальні та навчально-методичні посібники (наприклад, Крамора В. С. [2], Федака І. В. [3], Сясєва А. В., Баланенко І. Г. [4], Прус А. В., Швеця В. О. [5], Петришина Р. І., Житарюка І. В., Мартинюк О. В., Колісник Р. С. [6] та інш.), публікації у періодичних фахових виданнях, (наприклад, [7-12]), на інтернет ресурсах (наприклад, [13-15]), в дослідженнях молодих науковців, дослідників (наприклад, [16-17]).

У статті [7] авторами наведено методичні аспекти поєднання аналітичного та графічного методів розв'язування задач з параметром із сучасними засобами навчання математики, розглянута низка задач з параметром, розв'язання яких передбачає використання демонстрації динамічної моделі розглядуваної задачі в середовищі GeoGebra.

Дослідники формулюють у якості висновків твердження, що такий підхід до викладання дозволить забезпечити реалізацію не лише математичної, а й інформаційної компетентностей учня, при цьому система GeoGebra використовується як засіб для візуалізації досліджуваних математичних об'єктів, виразів, що надає користувачеві набір спеціалізованих інструментів для створення і перетворення об'єкта.

У статті [8] автори навели свої теоретичні обґрунтування впливу задач із параметрами на активізацію пізнавальної діяльності школярів на уроках алгебри, при цьому сформулювали декілька методичних рекомендацій (нажаль без конкретизації та прикладів), до яких віднесли наступні: «збільшити кількість часу на заняття, змістовно пов'язані з параметрами; застосувати задачі з параметрами за суміжними предметами; звертатися до диференційного та проєктного підходів при відборі або конструюванні задач; використовувати інші педагогічні технології для урізноманітнення навчального матеріалу та оптимізації навчального процесу» [8, с. 80].

У дослідженні [9] автором зроблено наголос на виокремлення та координацію в умовах підвищення кваліфікації вчителів дидактичних зв'язків деяких класів задач з параметрами з нестандартними прийомами дослідження найменших (найбільших) значень відповідних виразів. Розкриття матеріалу проводиться на конкретних задачах підвищеної складності олімпіадного рівня (рівняння та нерівності першого та другого степеня, що містять невідому змінну під знаком модуля) з обґрунтуванням підходу до навчання в режимі поступового мотивованого руху задачнотеоретичними ланцюжками з обговоренням різних

 ISSN: 2786-9458

способів розв’язування, засобами аналізу, синтезу, рефлексивного оцінювання формувати математичні компетентності учнів.

Науковці в роботі [10] на основі проведеного аналізу навчальної літератури 7-9 класів відмічають у системі задач розділу «Лінійні рівняння з однією змінною», концентрацію задач, які по суті є задачами з параметром, однак, в яких термін «параметр» використовується в завуальованій формі.

Виокремлено тематичні блоки алгебри 7-9 класів, що дозволяють органічно інтегрувати систематичне навчання розв'язування параметричних задач у відкритому форматі. Акцент зроблено на важливість вивчення параметричних завдань у системі шкільної математичної підготовки

Також важливість вивчення задач з параметром підкреслено в роботах закордонних вчених. Наприклад, в статті [11] авторами наведено результати дослідження, яке присвячене тому, як учні середніх шкіл та студенти-педагоги розв’язують рівняння, що подаються у різних формах, деякі з котрих є нестандартними. Науковці досліджували, як випробовувані розв’язують ці рівняння, а також відмінності між учнями та студентами-педагогами. Автори звернули увагу на складнощі, які виникають в задачах, де рівняння є результатом побудови математичної моделі задачі, що задана текстово.

В роботі [12] авторами розглядалось проблема дослідження розв’язків та їх кількості для контекстних задач, математичними моделями яких є системи лінійних рівнянь, що мають параметри. Дослідники наголосили на тому, що розгляд таких задач, особливо з економічним змістом, формує варіаційне, критичне мислення як цінну стратегію для визначення валідності розв'язку, розвиває у здобувачів освіти здатність розрізняти невідомі, змінні та параметри, досліджувати вплив параметрів на кінцевий результат.

Авторами [18] на основі проведеного власного дослідження, у якому взяли участь 290 студентів фізико-математичного факультету Житомирського державного університету, запропонована модель цілеспрямованого формування у майбутніх вчителів математики поняття параметра в процесі вивчення дисципліни «Задачі з параметрами» (проводилось навчання розв'язуванню лінійних, квадратних і дробових рівнянь з параметрами). При цьому науковці виділили типові помилки студентів під час вивчення цих тем і створили систему засобів для їх запобігання.

Наведений короткий огляд дозволяє зробити висновок про актуальність питання методики викладання тем шкільного курсу математики, в яких розглядаються задачі підвищеної складності, задачі з параметром, окреслити перелік проблем та труднощів, що виникають у здобувачів освіти при роботі з такими типами задач.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Представлений вище стислий аналіз дає підстави стверджувати, що у проведених раніше дослідженнях, на наш погляд, практично не розглядається питання навчання розв’язувати математичні задачі підвищеної складності, задачі з параметром у концепції підготовки до НМТ/ЗНО та недостатньо розглянуто можливості використання ІКТ для підвищення математичної підготовки здобувачів освіти.

Розробка підходу до навчання математики, зокрема задач з параметром, на основі системного використання демонстраційних візуалізацій, отриманих засобами ІКТ; до ключових задач; що враховує досвід ЗНО/НМТ з математики останніх років, на наш погляд є ще невирішеною проблемою.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Метою даної роботи є розробка підходу до навчання розв’язувати задачі з параметрами з системним використанням візуалізацій, отриманих засобами GeoGebra, що враховує досвід ЗНО/НМТ з математики останніх років, та може бути основою для аналізу задач в ході колективної роботи «учень-учитель», індивідуального опрацювання матеріалу або самостійного дослідження.

ISSN: 2786-9458

Виклад основного матеріалу дослідження. Ефективним способом подолання зазначених труднощів є розширення досвіду роботи учнів з алгебраїчними та трансцендентними рівняннями, нерівностями та їх системами через роботу з їх геометричними та графічними інтерпретаціями, геометричними об'єктами, графіками функцій засобами динамічного математичного програмного забезпечення GeoGebra.

Моделювання математичних об'єктів у середовищі GeoGebra з використанням інтерактивних креслень створює умови для більш ефективного та детального осмислення учнями структурної організації досліджуваних об'єктів, впливу параметрів на поведінку цих об'єктів, їх взаємне розташування, а також на наявність розв'язків відповідних рівнянь, систем рівнянь.

Завдяки дослідженню інтерактивної моделі, що відповідає поставленій задачі, учні здобувають можливість виявляти необхідні факти для розв'язання задачі, свідомо опанувати алгоритми розв'язання завдань ЗНО/НМТ.

Набувши досвіду роботи з демонстраційними моделями в GeoGebra, учні поступово розуміють логіку побудови розв'язків, наочно побачивши варіанти розміщення відповідних геометричних та графічних інтерпретацій перекладають на мову алгебри та будують алгоритми розв'язання вихідних задач.

Впровадження платформи GeoGebra в освітній процес покращить сприйняття навчального матеріалу, дозволить перевірити припущення, сформульовані учнями, обрати методику та структуру розв'язання задачі, а також оптимізувати навчальну взаємодію між педагогом та учнями.

До основних методик розв'язування задач з параметрами зазвичай відносять [2, 5, 6, 19]: аналітичний метод (алгебраїчне розв'язування без використання графіків, що базується на аналізі умов існування розв'язків з використанням дискримінанту для квадратних рівнянь, теореми Вієта); графічний метод (використання графічного тлумачення, перетворення графіків функцій та ГМТ на координатній площині [19]).

 ISSN: 2786-9458

При цьому основними підходами до зазначених методик виступають: метод перебору значень параметра; метод розбору випадків; координатний метод, функціонально-графічний метод, алгоритмічний підхід.

У більшості випадків працює алгоритмічний підхід, який відображає загальну методику розв'язання задач з параметром, а саме: 1. аналіз області визначення рівняння/нерівності, системи рівнянь/нерівностей; 2. дослідження поведінки функції залежно від значення параметра; 3. визначення критичних значень параметра; 4. розгляд окремих випадків для кожного інтервалу значень; 5. формулювання відповіді для кожного діапазону параметра.

Ефективна методика поєднує кілька підходів залежно від специфіки конкретної задачі та рівня підготовки учнів.

На прикладах та на опорних конспектах в роботі Апостолової Г. В., Ясінського В. В. [19] наведена методика розв'язання лінійних, квадратних, дробово-лінійних рівнянь та нерівностей.

З методичної точки зору навчання певному типу задач, ключовим задачам доцільно організовувати поетапно та здійснювати за наведеною далі схемою на прикладі розв'язання завдання № 34 основної сесії ЗНО 2021 р. (рис. 1).

Рисунок 1

Задача №34 НМТ 2021 р. [1].

34. Задано систему рівнянь $\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1, \end{cases}$ де x, y – змінні, a – довільна стала.

1. Розв'яжіть систему, якщо $a = 0$.
2. Визначте всі розв'язки заданої системи залежно від значень a.

Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів							Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**			
90,2	7,4	0,9	0,6	0,7	0,0	0,2	2,5	9,2	0,6

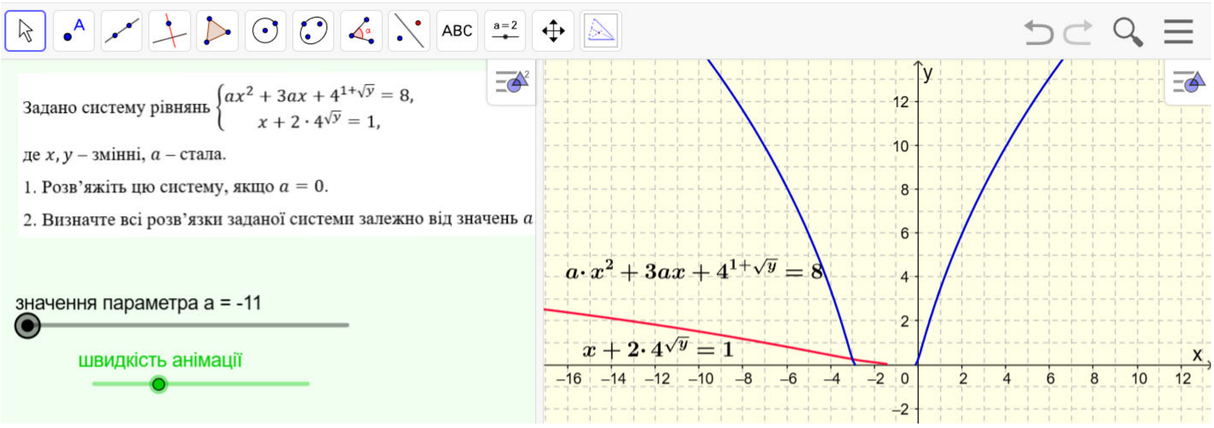
Етапи роботи із задачами з параметром.

1. Підготовчий. На цьому етапі *учитель* завчасно, до уроку, створює шаблони (рис. 2) для ключових задач, завдань для аудиторної та домашньої роботи (зберігається в хмарному сховищі, учням надається посилання).

 ISSN: 2786-9458

Рисунок 2

Шаблон для задачі №34 НМТ 2021 р..



2. Аналітичний. Учитель робить постановку задачі, наводить її формулювання та робить первинний аналіз умови (рис. 1). *Учні* опрацьовують умову задачі, роблять нотатки у зошиті або у спецзастосунку. У спільній діяльності висуваються гіпотези та проводиться їх аналіз, обговорюються можливі підходи до розв'язання та наводиться їх обґрунтування. Проводиться аналіз області визначення рівняння/нерівності, системи рівнянь/нерівностей.

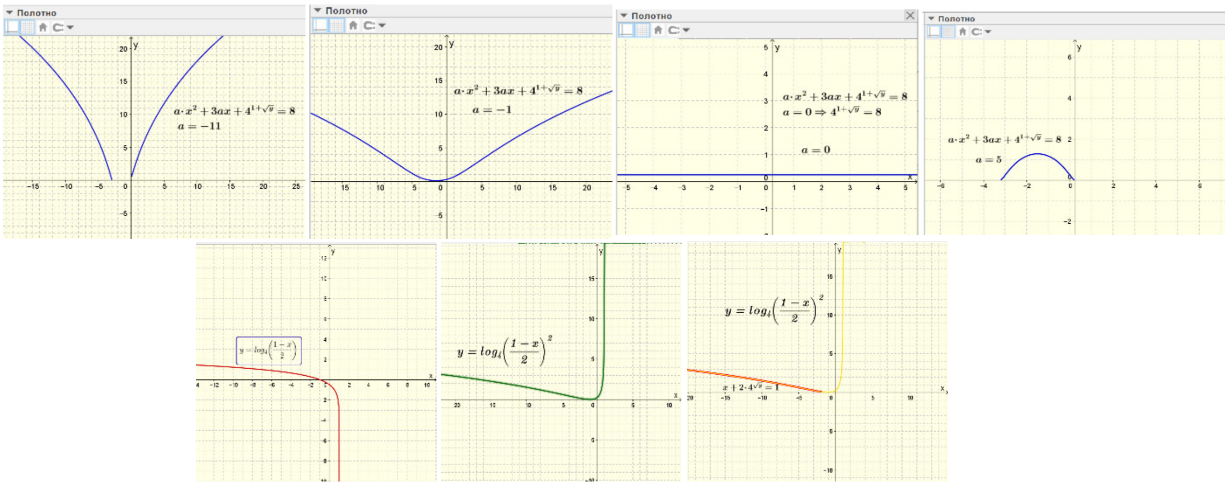
3. *Демонстраційно-сполучний.* На цьому етапі *учитель* презентує запропоновану задачу або опорну ключову задачу у вигляді готової моделі, яка пропонує учням розглянути візуальну інтерпретаційну конструкцію у динамічному режимі. При цьому надаються пояснення щодо того, яким чином ілюстративна модель корелює з вимогами задачі, та створюється взаємозв'язок між графічним зображенням і текстовою частиною завдання.

Учні адаптують свої уявлення до обраних підходів до розв'язання, аналізують динамічні зміни та фіксують якісно різні випадки, розвивають візуальне сприйняття задачі, модифікують власні графічні побудови.

 ISSN: 2786-9458

Рисунок 3

Опорні ключові задачі: графічні зображення рівнянь системи



4. Проблемно-пошуковий. Розробка алгоритму розв'язання задачі. Учитель спрямовує учнів до розв'язання задачі за допомогою додаткових запитань. У процесі обговорення учитель підводить учнів до можливих інтерпретацій, які потім демонструє на моделі, що сприяє виявленню якісно різних випадків, їх алгебраїчних аналогів і просуванню в розв'язанні задачі.

Учні активно долучаються до обговорення: здійснюють пошук потрібних співвідношень, формулюють припущення, обґрунтовують свої думки, у спільній роботі з учителем, разом визначають стратегію розв'язання задачі.

Стратегія розв'язання:

а) розглянути систему при $a = 0$, а саме $\begin{cases} 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1; \end{cases}$ б) розглянути випадок при $a \neq 0$. Розв'язок будується методом введення заміни (наприклад $4^{\sqrt{y}} = t$, $t > 0$ або $2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = t, t > 0$ та зведенням до квадратного рівняння з параметром; в) розв'язання отриманого квадратного рівняння з параметром, в залежності від значення дискримінанта; г) остаточна відповідь.

Зауваження: На кожному кроці а)-в) алгоритму розглядається графічна інтерпретація кожного рівняння, та їх взаємне розташування. Проводиться паралельна з розв'язанням демонстрація на моделі.

 ISSN: 2786-9458

5. Реалізація розробленого плану. Розв'язання задачі. Перевірка адекватності отриманого результату.

Учні самостійно здійснюють у зошитах необхідні додаткові побудови та наводять розв'язок задачі з вичерпними поясненнями, що з'явилися під час спільного розгляду моделі. Паралельно *вчитель* презентує на дошці відповідні алгебраїчні співвідношення та супутні числові операції, при необхідності звертає увагу на критичні моменти методики розв'язання та керує роботою класу.

Розв'язання:

I. При $a = 0$ маємо систему $\begin{cases} 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$ ОДЗ: $y \geq 0$, $x(-\infty; +\infty)$.

$$\begin{cases} 2^{2+2\sqrt{y}} = 2^3, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y} = 1, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}, \\ x = -3. \end{cases}$$

II. При $a \neq 0$: $\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$ Після заміни $2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = t$, $t > 0$

отримаємо $\begin{cases} ax^2 + 3ax + 2t = 8, \\ x + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax^2 + 3ax + 2(1 - x) - 8 = 0, \\ t = 1 - x. \end{cases}$

Перепишемо перше рівняння системи. Маємо $ax^2 + (3a - 2)x - 6 = 0$.

Розглянемо випадки $D = 0$, $D \neq 0$, де $D = 9a^2 + 12a + 4 = (3a + 2)^2$.

1. $D = 0$. $D = (3a + 2)^2 = 0$, $a = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{3a-2}{2a} = -3$.

$$t = 1 - x = 1 - (-3) = 4, \quad 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 4 \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}, \; y = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, маємо розв'язок $x = -3; y = \frac{1}{4}$ при $a = -\frac{2}{3}$.

2. $D \neq 0$. При $a \neq -\frac{2}{3}$ $x_{1,2} = \frac{-(3a-2) \pm (3a+2)}{2a}$, $x_1 = \frac{2}{a}$, $x_2 = \frac{-6a}{2a} = -3$.

Для $x_2 = -3$ маємо $y_2 = \frac{1}{4}$.

Для $x_1 = \frac{2}{a}$, отримаємо $t = 1 - \frac{2}{a} = \frac{a-2}{a} > 0$, $\Rightarrow a \in R \backslash [0; 2]$.

Виконаємо обернену заміну: $t = 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = \frac{a-2}{a}$, $2^{1+2\sqrt{y}} = \frac{a-2}{a}$,

$log_2 (2^{1+2\sqrt{y}}) = log_2 \left(\frac{a-2}{a}\right) \Rightarrow 1 + 2\sqrt{y} = log_2 \left(\frac{a-2}{a}\right) \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2} log_2 \left(\frac{a-2}{2a}\right)$.

 ISSN: 2786-9458

Це рівняння має розв'язки за умови $log_2\left(\frac{a-2}{2a}\right) \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\frac{a-2}{2a} \geq 1 \;\; \Rightarrow \;\; a \in [-2;0)$.

Тоді при $a \in [-2;0)$ $y = \frac{1}{4}log_2^2\left(\frac{a-2}{2a}\right)$ та $x = \frac{2}{a}$.

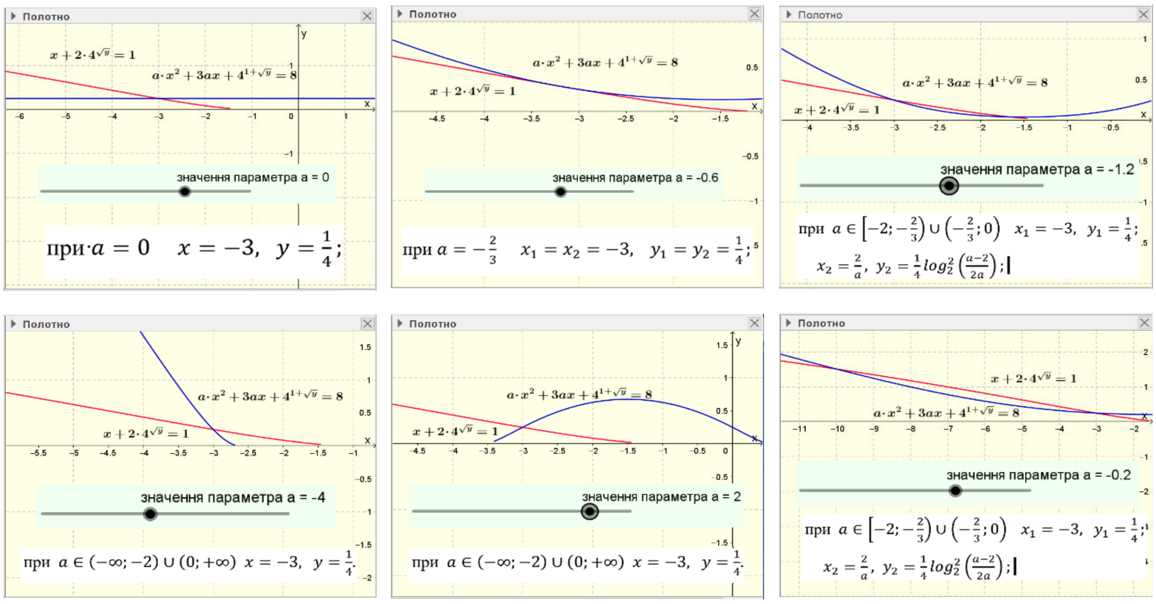
Відповідь: І. При $a = 0$ система має єдиний розв'язок $x = -3, \;\; y = \frac{1}{4}$; ІІ. а) при $a = -\frac{2}{3}$ система має єдиний розв'язок (два розв'язки, що співпадають) $x = -3, \;\; y = \frac{1}{4}$; б) при $a \in [-2; -\frac{2}{3}) \cup \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ система має два різні розв'язки $x_1 = -3, \;\; y_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{2}{a}$, $y_2 = \frac{1}{4}log_2^2\left(\frac{a-2}{2a}\right)$; в) при $a \in (-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$ система має єдиний розв'язок $x = -3, \;\; y = \frac{1}{4}$.

6. Рефлексія. Первинне та вторинне закріплення. Аналіз та узагальнення результату.

На заключному етапі роботи з задачею *учитель* разом з учнями повторно демонструє модель з усіма додатковими побудовами, обговорює з учнями ключові етапи розв'язання задачі, проводить оцінку ефективності обраного способу розв'язання, формулює висновки (рис. 4), обговорює можливості застосування застосованого методу розв'язання в інших ситуаціях.

Рисунок 4

Аналіз розв'язку задачі з залученням демонстраційної моделі.



ISSN: 2786-9458

Учні повторно осмислюють правильність математичних співвідношень, коректність виконаних креслень і логіку побудов. Кожен учень має можливість у домашніх умовах повторно переглянути динамічну модель задачі, закріпити візуальне уявлення про неї.

Розроблена динамічна ілюстраційна модель має теоретичні пояснення до кожного кроку, кожної підзадачі; дозволяє простежити всі етапи реалізації алгоритму розв’язання.

Слід підкреслити, що описаний підхід спрямований на формування, узагальнення та структурування математичних компетенцій здобувачів освіти, а також стимулюватиме їх участь у дослідницькій роботі з використанням ІКТ, що в подальшому створить можливості для реалізації міжпредметних проєктів.

Зауважимо, що виконання таких проєктів із задачами з параметром в класі і вдома виступатиме як творча складова етапу «Рефлексія. Первинне та вторинне закріплення. Аналіз та узагальнення результату», є корисною базою для поглибленого вивчення математики, підготовки до олімпіад.

Висновки. Отже, у дослідженні представлено методичну стратегію навчання розв'язуванню задач з параметром, що ґрунтується на принципі поетапного опрацювання задач з параметрами через використання інтерактивних цифрових демонстраційних моделей, побудованих у GeoGebra, адаптованих до специфіки математичних завдань ЗНО/НМТ останніх років.

Список використаних джерел

1. Сайт Українського центру оцінювання якості освіти: Офіційні звіти. URL: https://testportal.gov.ua/ofzvit/

2. Крамор В. С. Задачі з параметрами і методи їх розв’язання. (Серія «Готуємося до математичних турнірів»). Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012. 416 с.

 ISSN: 2786-9458

3. Федак І. В. Розв'язування задач підвищеної складності з математики : навч. посіб. Івано-Франківськ, 2010. 100 с.

4. Сясєв А. В., Баланенко І. Г. Задачі з параметрами. Частина 1 : навч. посіб. Дніпро : Дніпровський нац. ун-т, 2019. 104 с.

5. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики : навч.-метод. посіб. Житомир : Рута, 2018. 540 с.

6. Петришин Р. І., Житарюк І. В., Мартинюк О. В., Колісник Р. С. Задачі з параметрами. Практикум. Частина 1 : навч. посіб. Київ : Видавництво «Людмила», 2022. 544 с.

7. Віра М., Самусенко П. Застосування програмного засобу GeoGebra до розв'язування алгебраїчних задач з параметром. *Фізико-математична освіта*. 2023. Т. 38. № 1. С. 7–13. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-1-001

8. Бесєдін Б., Рульова Н., Сагай А. Задачі з параметрами як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів на уроках алгебри. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*. 2022. № 12. С. 77–81.

9. Мітельман І. М. Оцінювання деяких виразів з модулем числа під час розв'язування задач з параметрами в дидактичному контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Академічні візії*. 2023. Вип. 20. (Електронне фахове видання). DOI: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614

10. Прус А., Чемерис О. Чи є місце параметрам у шкільному курсі математики? *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*. 2024. № 2. С. 29–43. DOI: 10.31652/3041-2277-2024-2-29-43

11. Ilany B.-S., Hassidov D. Solving Equations with Parameters. *Creative Education*. 2014. Vol. 5. No. 11. P. 963–968. DOI: 10.4236/ce.2014.511110

12. Hernández-Zavala L. E., Acuña-Soto C., Liern S. Use of parameters in equations and systems of linear equations: A proposal to boost variational thinking. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 2025. Vol. 20(2), em0822. DOI: https://doi.org/10.29333/iejme/16005

13. Курс «Математика. Підготовка до ЗНО» на платформі Prometheus. URL: https://prometheus.org.ua/prometheus-free/math-zno-prep/

14. Сайт «ЗНО-ОНЛАЙН»: Тести ЗНО/НМТ онлайн з математики. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/

15. MadAsMaths: Free Resources for Students and Teachers of Mathematics. URL: https://madasmaths.com/

16. Дейніченко Т. І., Ковалівська А. А. Щодо проблеми розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами у підготовці до ЗНО. *Наумовські читання : зб. тез XIX наук. конф. студ. та молод. учених* (23–24 листопада 2021 р., м. Харків). Харків : ХНПУ, 2021. С. 58–60. URL: https://drive.google.com/file/d/1wmupwEDnUymS84X21iHfrXC8XEY0b_sB/view?pli=1

17. Куций С. В., Грод І. М. Задачі параметричної оптимізації в загальноосвітній школі. *Збірник тез доповідей VII Міжнародної науково-практичної конференції «Підготовка майбутніх учителів фізики, хімії, біології та природничих наук в контексті вимог Нової української школи»* (22–23 травня 2025 р.). 2025. С. 178–181. URL: http://physicsnature.tnpu.edu.ua/media/arhive/physics_nature_2025%20збірник.pdf

18. Prus A., Lenchuk I. Teaching Future Mathematics Teachers to solve Problems with Parameters: Ukrainian Experience. *Mathematics and Informatics*. 2024. Vol. 67. P. 661–683. DOI: 10.53656/math2024-6-6-tea

19. Апостолова Г. В., Ясінський В. В. Перші зустрічі з параметром. Київ : Факт, 2008. 324 с.

 ISSN: 2786-9458