



**Інформаційно-комунікаційні технології в освіті**

УДК 37.02: 37.04: 377: 330.4: 519.22

DOI <https://doi.org/10.5281/zenodo.17383406>

**Використання систем комп'ютерної алгебри для реалізації математичних моделей економічних задач, які використовують апарат лінійної алгебри**

**Зіновєєв Ігор Валерійович**

кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики, Запорізький національний університет,  
вул. Університетська, 66, м. Запоріжжя, 69011, Україна,  
<https://orcid.org/0000-0002-7392-2327>

**Манько Наталія Іванівна-Володимирівна**

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, Запорізький національний університет,  
вул. Університетська, 66, м. Запоріжжя, 69011, Україна,  
<https://orcid.org/0000-0001-8995-7316>

**Прийнято: 02.10.2025 | Опубліковано: 16.10.2025**

***Анотація:** Мета.* Дослідження на конкретних прикладах навчального матеріалу підготовки бакалаврів математичного напрямку здобуття вищої освіти застосування систем комп'ютерної алгебри для реалізації математичних моделей економічних задач, які використовують апарат лінійної алгебри.

***Методи.*** В ході дослідження було використано комплекс загальнонаукових і спеціальних методів дослідження: аналіз і синтез наукових джерел, порівняння підходів до розв'язання економіко-математичних задач, системно-



структурний аналіз рамок цифрової компетентності, а також узагальнення результатів. Застосування цих методів дало змогу визначити як сильні сторони попередніх підходів, так і наявні невирішені проблеми.

**Результати.** Досвід останніх років показує – сучасне економічне управління, а саме: планування, організація, мотивація, контроль, неможливе без економіко-математичного моделювання. Така вимога суспільства зумовлює необхідність належної підготовки спеціалістів, здатних розробляти відповідні методи та моделі, що, у свою чергу, передбачає інтегрований підхід до навчання студентів як економічних, так і математичних спеціальностей.

В статті на конкретних прикладах розв'язання двох задач навчального матеріалу підготовки бакалаврів математичного напрямку здобуття вищої освіти, а саме економетричної задачі побудови та дослідження за статистичними даними лінійної регресійної математичної моделі та задачі міжгалузевого балансу, досліджено використання MS Excel та системи комп'ютерної алгебри Maple для реалізації математичних моделей зазначених задач.

В ході порівняння зазначених підходів зроблено висновок про те, що використання систем комп'ютерної алгебри дозволяє легко реалізовувати алгоритми розв'язання розглянутих типів задач завдяки використанню математичної символіки та підтримці символічних обчислень, що особливо важливо в задачах, де необхідно отримати залежності в аналітичній формі.

**Висновки.** Впровадження та використання у навчальному процесі систем комп'ютерної алгебри для реалізації математичних моделей економічних задач, які використовують апарат лінійної алгебри, сприяє підвищенню рівня професійної підготовки студентів, формуванню їх фахових компетентностей.

**Ключові слова:** економіко-математичні моделі, навчання, система комп'ютерної алгебри, MS Excel, Maple, лінійна алгебра, економетрична задача, модель міжгалузевого балансу.



## Using computer algebra systems to implement mathematical models of economic problems that use linear algebra

**Zinovieiev Ihor**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of General Mathematics, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, <https://orcid.org/0000-0002-7392-2327>

**Manko Nataliia**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, <https://orcid.org/0000-0001-8995-7316>

**Abstract: Objective.** *Research, using concrete examples from teaching materials for bachelor's degree programmes in mathematics, on the use of computational algebra systems to implement mathematical models of economic problems that use linear algebra.*

**Methods.** *The study used a combination of general scientific and special research methods: analysis and synthesis of scientific sources, comparison of approaches to solving economic and mathematical problems, system-structural analysis of digital competence frameworks, and compilation of results. The application of these methods made it possible to identify both the strengths of previous approaches and existing unresolved problems.*

**Results.** *The practice of the recent years demonstrates that modern economic management, namely planning, organisation, motivation, and control, is impossible without economic and mathematical modelling. This requirement of society necessitates the proper training of specialists capable of developing appropriate*



*methods and models, which, in turn, requires an integrated approach to teaching students of economics and mathematics.*

*In the article, using specific examples of solving two problems from the educational material for training bachelor's degree students in mathematics, namely, an econometric problem of constructing and researching a linear regression mathematical model based on statistical data and an inter-industry balance problem, the use of MS Excel and the Maple computer algebra system for realisation of mathematical models of these problems is investigated.*

*When comparing the approaches discussed, it was concluded that the use of computer algebra systems makes it easy to implement algorithms for solving the types of problems discussed, since mathematical symbols and symbolic computation are supported, which is very important in problems where dependencies need to be obtained in analytical form.*

**Conclusions.** *The integration and use of computer algebra systems in the educational process to implement mathematical models of the economic problems that use linear algebra contributes to improving the level of professional training of students and developing their professional competencies.*

**Keywords:** *economic and mathematical models, education, computer algebra system, MS Excel, Maple, linear algebra, econometric problem, inter-industry balance model.*

**Постановка проблеми.** Як свідчить досвід останніх років, реалізація в економіці таких основних управлінських функцій, як планування, організація, мотивація та контроль неможлива на сучасному етапі без застосування економіко-математичних методів та моделей. При цьому володіння такими методами неможливе без якісної підготовки фахівців, які будуть розробляти такі економіко-математичні методи та моделі, що в свою чергу потребує



комплексного підходу до навчання здобувачів вищої освіти як економічного, так і математичного напрямку.

Такий комплексний підхід повинен мати економічну, математичну та прикладну математичну складові та складову, яка формує ІКТ-компетентності роботи зі спеціалізованими програмними засобами математичного моделювання, аналітичних обчислень і візуалізації, що дозволить здобувачам в майбутньому фахово виконувати професійні обов'язки.

Дослідження особливостей реалізації такого підходу, на наш погляд, є актуальним.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проведемо короткий аналіз досліджень і публікацій, які присвячені питанням економіко-математичного моделювання, дослідженням підходів до розв'язання економічних задач із застосуванням спеціалізованих програмних продуктів, зокрема сучасних систем комп'ютерної математики.

У навчальному посібнику [1] розглядаються окремі економічні моделі (балансові, моделі ринку та економічного зростання, економіко-статистичні та прогностичні моделі, оптимізаційні моделі), їх математичні постановки. Основна увага приділяється питанням застосування методів обчислень до розв'язання отриманих економіко-математичних задач (наприклад числові методи, методи оптимізації, методи математичного програмування). Для прикладів чисельного розв'язання окремих практичних задач авторами використано систему комп'ютерної математики MATLAB.

У статті [2] наведено загальну характеристику найпопулярніших систем комп'ютерної математики як комерційних (Maple, Mathematica, Matlab), так і вільно поширюваних (Scilab, Maxima, комплекс програм GRAN, Sage) й умови ефективного використання даних систем як засобу фундаменталізації навчального процесу бакалаврів інформатики. Розглянуто роль СКМ у



підготовці бакалаврів інформатики. Однак практично відсутні приклади застосування до розв'язання економетричних задач.

Автори роботи [3] розглядають застосування системи комп'ютерної алгебри Mathematica для розв'язування задач математичного аналізу, алгебри, теорії функцій, чисельних методів та диференціальних рівнянь. Один з розділів підручника присвячений розв'язанню задач оптимізації. В якості ілюстрацій наведено декілька прикладів розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування.

Роботи [4-5] стосуються використання програмного забезпечення Maple для аналізу, дослідження та вирішення економічних і фінансових задач, математичного моделювання економічних явищ. Авторами обох робіт зроблено висновок, що СКА Maple надає інструменти для складних математичних розрахунків, візуалізації та інтерактивного моделювання, що робить його корисним як для економічної освіти, так і для професійних досліджень у сфері фінансів та економіки.

Досліджується застосування системи комп'ютерної математики Maple для створення математичних моделей в економічних секторах в статті [6]. Акцент при цьому робиться на кількісних методах в економіці.

У своїй статті [7] португальські науковці представляють PES(Linear)-Tool – новий динамічний та інтерактивний інструмент, створений за допомогою СКА Mathematica та доступний у форматі обчислювального документа (Computable Document Format). При цьому авторами підкреслена неможливість досягнення цілей та навичок навчальними програмами з економіки на середньому та бакалаврському рівнях без використання графічних ілюстрацій до розв'язків задач економіки. На конкретних прикладах дослідники демонструють застосування інструменту комп'ютерної алгебри PES(Linear)-Tool до вивчення однієї з найширше використовуваних концепцій у соціально-економічних курсах – цінової еластичності функції пропозиції.



У роботі [8] описується робочий процес розробки інтерактивних візуалізацій, що застосовуються до фінансових мереж. Автор пропонує чотири програми, написані мовою Wolfram, які налаштовують фінансові моделі вхід-вихід, поєднуючи команду Manipulate з вбудованими функціями Mathematica та функціями пакета IGraph (IGraph/M).

У статті [9] розкрито особливості практичного застосування сучасних інформаційних технологій до здійснення прогнозування макроекономічних процесів на основі економетричних моделей. Для проведення аналізу оцінки впливу макроекономічних показників на динаміку господарської діяльності застосовано кореляційно-регресійний аналіз. Здійснено макроекономічне прогнозування показників реального валового внутрішнього продукту за допомогою економетричної моделі з використанням пакету Eviews.

Колективом авторів у своєму дослідженні [10] наведено огляд застосування регресійних моделей, часових рядів та інших економетричних методів з прикладами цифрових/кількісних інструментів.

### **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми.**

Узагальнюючи представлений вище огляд наукових та навчальних матеріалів, можна зробити висновок, що сучасні системи комп'ютерної математики (MATLAB, Maple, Mathematica, Scilab, Maxima, Sage тощо) широко застосовуються для розв'язання різноманітних економіко-математичних, статистичних, оптимізаційних та фінансових задач, сприяючи підвищенню ефективності досліджень і навчання. Водночас спостерігається недостатня увага до використання цих систем безпосередньо в дослідженнях економічних задач у процесі навчання здобувачів вищої освіти, хоча потенціал використання систем комп'ютерної алгебри у моделюванні, прогнозуванні та візуалізації економічних процесів є значним і активно розвивається в освітній і науковій практиці.

**Формулювання цілей статті (постановка завдання).** Поставимо за мету дослідити на конкретних прикладах навчального матеріалу підготовки

бакалаврів математичного напрямку здобуття вищої освіти використання систем комп'ютерної алгебри для реалізації математичних моделей задач економетрії, які використовують апарат лінійної алгебри.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Розглянемо приклад типової для економетрії задачі – задачу побудови та дослідження на основі статистичних даних економетричної моделі парної лінійної регресії (рис. 1).

## Рисунок 1

### *Приклад постановки економетричної задачі*

**Задача 1.** На основі табличних даних про роздрібний товарообіг і доходи населення у грошових одиницях побудуйте та дослідіть

№	Доходи населення, тис. ум.од.	Роздрібний товарообіг, тис. ум.од.
1	31	27
2	18	17
3	29	26
4	20	18
5	21	19
6	25	23
7	24	21
8	28	25
9	22	20
10	27	24

економетричну модель парної лінійної регресії.

Для цього:

1. Виконайте ідентифікацію змінних та специфікацію моделі.

2. Оцініть параметри моделі методом найменших квадратів.
3. Побудуйте базову таблицю дисперсійного аналізу та визначте дисперсії.
4. Визначте коефіцієнти детермінації, кореляції та еластичності.
5. Перевірте статистичну значущість коефіцієнта детермінації, коефіцієнта кореляції та визначте його надійний інтервал.
6. Визначте стандартні помилки оцінок параметрів моделі.
7. Перевірте статистичну значущість оцінок параметрів моделі та визначте їх надійні інтервали.
8. Перевірте адекватність економетричної моделі.
9. Визначте надійні інтервали базисних значень.
10. Визначте точковий та інтервальний прогнози для заданого прогнозного значення доходів населення на рівні 34,1 тис.ум.од.
11. Побудуйте графіки фактичних даних, лінію регресії, її надійні інтервали та лінію тренда.
12. Перевірте точність економетричної моделі за допомогою середньої відносної похибки апроксимації.
13. Побудуйте економетричну модель за допомогою функції ЛІНЕЙН (LINEST)
14. Виконайте економіко-математичний аналіз характеристик економетричної моделі.

Класичним підходом до розв'язання економічних задач, що використовують статистичні данні, є використання технологій обробки числових даних, що достатньо повно реалізовані в Microsoft Excel (аналогах Excel, наприклад, безкоштовних офісних інструментах Google Sheets, LibreOffice Calc, Apache OpenOffice Calc, WPS Office Spreadsheets, та професійних аналітичних інструментах для розширеної обробки даних – R / RStudio, Python (бібліотеки Pandas, NumPy, SciPy), MATLAB, Maple, Mathcad, Mathematica). Дослідження

можливостей зазначених інструментів можна знайти в багатьох наукових публікаціях, наприклад [11-14].

Зауважимо, що до технологій обробки числових даних належать методи, засоби та програмні інструменти, що забезпечують збір, зберігання, аналіз, моделювання й представлення числової (кількісної) інформації.

Зазначимо, що у навчальному процесі для розв’язання подібних задач, завдяки своїй простоті у використанні, для роботи з електронними таблицями частіше застосовують табличні процесори Microsoft Excel або їх безкоштовні аналоги.

Проілюструємо розв’язання окремих етапів розв’язання наведеної вище задачі засобами Microsoft Excel та засобами систем комп’ютерної алгебри Maple 1.

### 1. Ідентифікація змінних та специфікація моделі.

Ідентифікуємо змінні економетричної моделі:  $X$  – вектор доходів населення (факторна, незалежна змінна);  $Y$  – вектор роздрібного товарообігу (результативна, залежна змінна);  $u$  – вектор залишків (стохастична складова).

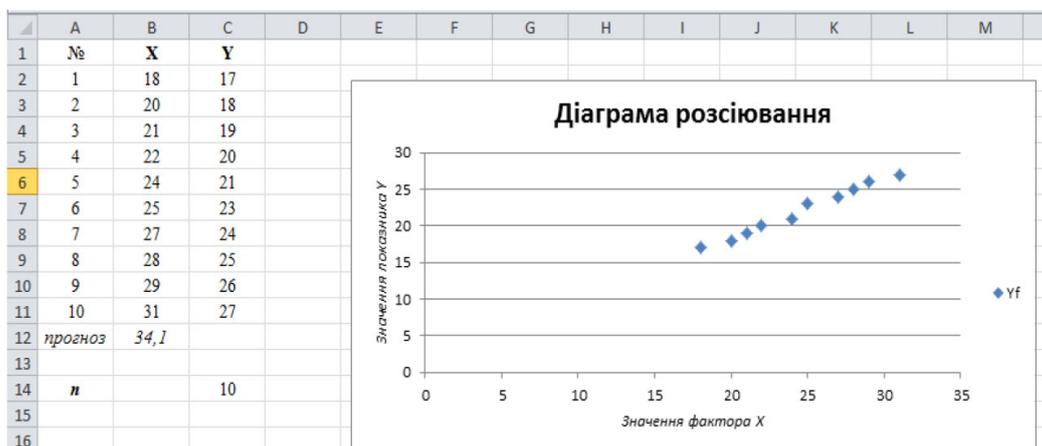
Загальний вигляд моделі:

$$Y = f(X, u). \quad (1)$$

Після сортування даних для вибору виду моделі будуємо діаграму розсіювання (рис. 2).

### Рисунок 2

*Вихідні данні (відсортовані) та діаграма розсіювання (MS Excel)*



Візуальний аналіз діаграми розсіювання дозволяє висунути гіпотезу, що між ознаками  $X$  та  $Y$  існує лінійна залежність. Тоді специфікацію економетричної моделі (1) обираємо у вигляді лінійної функції:

$$Y = a_0 + a_1X + u. \quad (2)$$

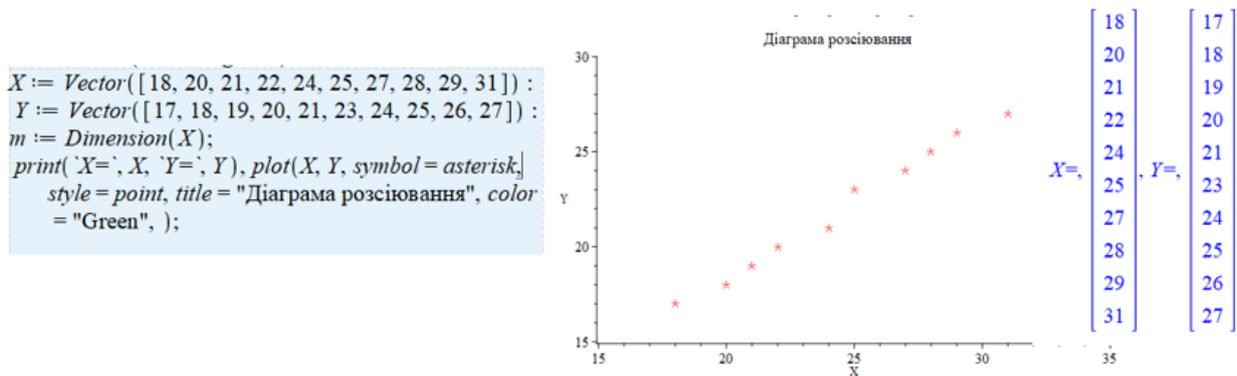
Рівняння регресії:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X, \quad (3)$$

де  $a_0, a_1$  – невідомі параметри моделі;  $\hat{a}_0, \hat{a}_1$  – їх оцінки;  $\hat{Y}$  – теоретичне (регресійне) значення результативної змінної;  $u = Y - \hat{Y}$ .

### Рисунок 3

Вихідні данні та діаграма розсіювання (СКА Maple)



## 2. Оцінювання параметрів моделі методом найменших квадратів.

Метод найменших квадратів (МНК) дозволяє підібрати певну неперервну аналітичну функцію для апроксимації дискретного набору вихідних даних. Задача зводиться до знаходження такої лінії (прямої, кривої, ламаної тощо), яка мінімізує суму квадратів відхилень між фактичними  $y$  та отриманими розрахунковим шляхом за рівнянням регресії теоретичними значеннями  $\hat{y}$ :

$$F = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min.$$

Оцінимо параметри  $\hat{a}_0, \hat{a}_1$  лінійної моделі (3) класичним МНК, попередньо висунувши гіпотезу, що всі умови Гауса-Маркова [15] для його застосування дотримані.

Для мінімізації функції  $F = \sum_{i=1}^n (y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 X))^2$  визначимо перші частинні похідні функції  $F$  по  $\hat{a}_0$  та  $\hat{a}_1$ , прирівняємо їх до нуля та отримаємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (4)$$

При розв'язанні в Excel проводимо необхідні для побудови (4) розрахунки, які заносимо до таблиці (рис. 4 а).

### Рисунок 4

Розрахункові дані для МНК: а) MS Excel; б) СКА Maple

	A	B	C	D	E
1	№	X	Y	X <sup>2</sup>	XY
2	1	18	17	324	306
3	2	20	18	400	360
4	3	21	19	441	399
5	4	22	20	484	440
6	5	24	21	576	504
7	6	25	23	625	575
8	7	27	24	729	648
9	8	28	25	784	700
10	9	29	26	841	754
11	10	31	27	961	837
12	сума	245	220	6165	5523

(а)

```
for i from 1 to m do X2[i] := X[i]^2; XY[i] := X[i]*Y[i] od;
SumX := add(X); SumY := add(Y); SumX2 := add(X2); SumXY := add(XY);
print(' X=', X, ' Y=', Y, ' X2=', X2, ' XY=', XY);
print(' SumX=', SumX, ' SumY=', SumY, ' SumX2=', SumX2, ' SumXY=', SumXY);
A := Matrix(['X', 'Y', 'X2', 'XY']): (([A], [B])): (([A], [B]));
```

$$X = \begin{bmatrix} 18 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 24 \\ 25 \\ 27 \\ 28 \\ 29 \\ 31 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad X^2 = \begin{bmatrix} 324 \\ 400 \\ 441 \\ 484 \\ 576 \\ 625 \\ 729 \\ 784 \\ 841 \\ 961 \end{bmatrix}, \quad XY = \begin{bmatrix} 306 \\ 360 \\ 399 \\ 440 \\ 504 \\ 575 \\ 648 \\ 700 \\ 754 \\ 837 \end{bmatrix}$$

SumX=, 245, SumY=, 220, SumX2=, 6165, SumXY=, 5523

(б)

Після підстановки в (4) отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими  $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ :

$$\begin{cases} 10\hat{a}_0 + 245\hat{a}_1 = 220, \\ 245\hat{a}_0 + 6165\hat{a}_1 = 5523. \end{cases} \quad (5)$$

Розв'язати цю систему рівнянь можна будь-яким з відомих математичних методів (типова задача елементарної алгебри та лінійної алгебри) або за допомогою «Пошук розв'язання» (Файл > Параметри > Надбудови > Надбудови Excel > Перейти > Аналіз > Пошук розв'язання) в Excel. Таким чином, будемо



мати:  $\hat{a}_0 = 1,94770$ ,  $\hat{a}_1 = 0,81846$ , а економетрична модель роздрібного товарообігу матиме вигляд:

$$\hat{Y} = 1,94770 + 0,81846X.$$

Достатньо легко отримати розв'язок отриманої системи (5) в СКА Maple (рис. 5), або будь-якій системі комп'ютерної алгебри, тому що задача розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є типовою задачею лінійної алгебри, що реалізована у всіх СКА.

### Рисунок 5

*Розв'язок системи (5) в СКА Maple*

```
eq1 := m*a0 + a1*SumX = SumY : eq2 := a0*SumX + a1*SumX2 = SumXY :  
solve([eq1, eq2], {a0, a1}), evalf(solve([eq1, eq2], {a0, a1}))
```

$$\left\{ a0 = \frac{633}{325}, a1 = \frac{266}{325} \right\}, \{ a0 = 1.947692308, a1 = 0.8184615385 \}$$

Зауважимо, що більшість з п. 1-12 наведеного на рис. 1 завдання розраховано на безпосереднє обчислення всіх складових розрахункових формул з подальшою в них підстановкою. Такий підхід дозволяє пройти здобувачеві освіти весь шлях від постановки задачі до отримання кінцевих результатів, зрозуміти логіку та послідовність розв'язання.

У цьому контексті варто зазначити, що у здобувачів крім фахових компетентностей економічного спрямування формуються фахові компетентності використання інформаційних технологій, технологій обробки числових статистичних даних, навички критичного мислення, інтерпретування та презентування отриманих результатів, відчувають тісний міжпредметний зв'язок.

Виконання п. 13 розраховано на застосування вбудованої функції ЛІНЕЙН (LINEST) у Microsoft Excel, яка використовується для побудови лінійної регресійної моделі за методом найменших квадратів.

В якості перших двох аргументів використовуються масиви або діапазони значень залежної змінної  $Y$ , та незалежної змінної  $X$ , а в якості третього та

четвертого параметрів виступають необов'язкові логічні параметри (якщо обидва TRUE, то функція повертає додаткову статистику (коефіцієнт детермінації, стандартні похибки тощо).

Результатом застосування цієї функції є масив значень : значення коефіцієнтів  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$  лінійної регресійної моделі та їх стандартні похибки;  $R^2$  (коефіцієнт детермінації); стандартну похибку прогнозованих значень  $Y$ ;  $F$ -статистику – критерій значущості моделі; кількість степенів свободи;  $SS$  регресії і  $SS$  залишків (рис. 6).

### 13. Побудова економетричної моделі за допомогою функції ЛІНЕЙН (LINEST).

Для виконання п. 13 задачі 1 застосуємо функцію  $LINEST(Y;X;1;1)$ . Результати виконання наведено на рис. 6.

#### Рисунок 6

#### Застосування функції LINEST (MS Excel)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	X	Y					
2	1	18	17	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_0$		0,8185	1,947692308
3	2	20	18	$S_{\hat{a}_1}$	$S_{\hat{a}_0}$		0,0297	0,73675765
4	3	21	19	$R^2$	$\sigma_u$		0,9896	0,378255103
5	4	22	20	$F$	$k = n - m$		760,82	8
6	5	24	21	$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2$		108,86	1,144615385
7	6	25	23					
8	7	27	24					
9	8	28	25					
10	9	29	26					
11	10	31	27					

Зауважимо, що практично кожна СКА має аналоги функції LINEST. Наприклад в СКА Maple аналогом функції LINEST із Excel виступають вбудовані функції спеціалізованого пакету (бібліотеки) Statistics.

Так функція LinearFit за масивами даних X, Y повертає аналітичну формулу для регресійної прямої. Якщо потрібна інформація про коефіцієнти, стандартні похибки,  $R^2$ , то використовуємо LinearFit у розширеному форматі  $LinearFit([1, x], X, Y, x, summarize = true)$ . Результати роботи наведено на рис. 7.

## Рисунок 7

### Застосування функції *LinearFit* (СКА Maple)

```
with(Statistics) :
model := LinearFit([1, x], X, Y, x) :
print('Y=', model);
inform := LinearFit([1, x], X, Y, x, summarize = true) :
;
forecast := eval(model, x = 34.1) :
print('Y(34,1)=', forecast);
Y=, 1.94769230769232 + 0.818461538461538 x

Summary:
-----
Model: 1.9476923+.81846154*x
-----
Coefficients:

```

	Estimate	Std. Error	t-value	P(> t )
Parameter 1	1.9477	0.7368	2.6436	0.0295
Parameter 2	0.8185	0.0297	27.5829	0.0000

```
-----
R-squared: 0.9896, Adjusted R-squared: 0.9883
Y(34,1)=, 29.8572307692308
```

При цьому прогнозне значення для  $x_{\text{пр}} = 34,1$ , визначене за побудованою моделлю, дорівнює  $u_{\text{пр}} = 29,85723$ .

В якості другого прикладу навчальної економічної задачі, для розв'язання якої доцільно використовувати можливості систем комп'ютерної алгебри, наведемо задачу міжгалузевого балансу (МГБ) [16] для економічної системи, яка має три галузі [17, с. 286] (рис. 8).

Алгоритм розв'язання цієї задачі передбачає виконання наступних кроків:

а) Обчислюється матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат  $B = (E - A)^{-1}$ , де  $E$  – одинична матриця;

б) Знаходяться обсяги валової продукції трьох галузей  $X = B \cdot Y$ ;

в) Обчислюються елементи таблиці міжгалузевого балансу: для отримання елементів першого квадранта необхідно послідовно перемножити елементи  $j$ -го стовпчика матриці  $A$  на  $X_j$ , тобто  $x_{ij} = a_{ij}X_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ; складові третього квадранта (умовно чиста продукція) знаходять як різницю між обсягами валової продукції та сумами елементів відповідних стовпчиків відшуканого першого

квадранта; четвертий квадрант складається з одного показника – суми елементів другого квадранта.

### Рисунок 8

*Задача міжгалузевого балансу для тригалузевої економічної системи*

**Задача 2.** Для тригалузевої економічної системи задані матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат і вектор кінцевої продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Необхідно обчислити коефіцієнти повних матеріальних витрат і вектор валової продукції, а також заповнити схему міжгалузевого матеріального балансу.

Результати обчислення за наведеною схемою наведено на рис. 9.

### Рисунок 9

*Результати обчислень задачі 2 [17, с. 289]*

**МІЖГАЛУЗЕВИЙ БАЛАНС ВИРОБНИЦТВА  
 Й РОЗПОДІЛУ ПРОДУКЦІЇ**

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Кінцева продукція	Валова продукція
	1	2	3		
1	232,6	51,6	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Умовно чиста продукція	155,0	153,1	291,9	600,0	
Валова продукція	775,3	510,1	729,6		2015,0

Економіко - математична модель задачі 2 використовує апарат лінійної алгебри – всі розрахункові рівняння алгоритму розв’язання задачі МГБ є або матричними, або алгебраїчними рівняннями над елементами матриць та алгебраїчних векторів.

Логічним кроком до розв’язання задач МГБ є використання інструментарію, що дозволяє виконувати такі дії, як операції над векторами та матрицями, розв’язання алгебраїчних рівнянь та систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Дієвим інструментарієм може виступати будь-яка система комп’ютерної алгебри. Наприклад СКА Maple має спеціалізований пакет *LinearAlgebra*.

Наведемо реалізований в Maple наведений вище алгоритм (рис. 10).

## Рисунок 10

Реалізований в Maple алгоритм розв'язання задачі 2

```
restart : with(LinearAlgebra) :
A := Matrix(3, 3, [0.3, 0.1, 0.4, 0.2, 0.5, 0., 0.3, 0.1, 0.2]) :
E := IdentityMatrix(3) : Y := Vector([200, 100, 300]) :
B := (E - A)-1 : X := Multiply(B, Y) : A1 := A :

print(` A=`, A, ` E=`, E, ` Y=`, Y);

A=,  $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0. \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$ , E=,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , Y=,  $\begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix}$ 

B :=  $\begin{bmatrix} 2.04081632653061 & 0.612244897959184 & 1.02040816326531 \\ 0.816326530612245 & 2.24489795918367 & 0.408163265306123 \\ 0.867346938775510 & 0.510204081632653 & 1.68367346938776 \end{bmatrix}$ 

print(Валова продукція, `X=`, X) :

Валова продукція, X=,  $\begin{bmatrix} 775.510204081633 \\ 510.204081632653 \\ 729.591836734694 \end{bmatrix}$ 

for j from 1 to 3 do A1 := ColumnOperation(A1, j, X[j]) end do:
print(`A1=`, A1);

A1=,  $\begin{bmatrix} 232.653061224490 & 51.0204081632653 & 291.836734693878 \\ 155.102040816327 & 255.102040816327 & 0. \\ 232.653061224490 & 51.0204081632653 & 145.918367346939 \end{bmatrix}$ 

print(умовно чиста продукція) :
X[1]- Norm(Column(A1, 1), 1), X[2]- Norm(Column(A1, 2), 1),
X[3]- Norm(Column(A1, 3), 1);

умовно чиста продукція
774.710204081633, 509.504081632653, 728.991836734694
```

Таким чином, використання систем комп'ютерної алгебри дозволяє легко реалізувати алгоритми розв'язання різноманітних класів задач, у тому числі економічних, з таких причин: висока автоматизація обчислень; використання математичної символіки, що дозволяє адекватно й легко будувати зрозумілі програмні реалізації алгоритмів; інтеграція аналітичних і числових методів; наочність і потужний апарат візуалізації; підтримка символічних обчислень, що особливо важливо для економічних моделей, де необхідно отримати залежності в аналітичній формі.

Отже, системи комп'ютерної алгебри забезпечують зручне середовище для математичного моделювання, аналізу та оптимізації економічних процесів, що



робить їх потужним інструментом у навчальному процесі при формуванні фахових компетентностей у здобувачів різних рівнів освіти.

**Висновки.** Застосування інформаційних технологій, зокрема систем комп'ютерної алгебри (математики), суттєво розширює можливості використання математичних методів і моделей для аналізу економічних процесів у професійній діяльності фахівців, які працюють з економіко-математичними моделями, статистичними даними. Тому впровадження та використання у навчальному процесі систем комп'ютерної алгебри для реалізації математичних моделей економічних задач, які використовують апарат лінійної алгебри, сприяє підвищенню рівня професійної підготовки студентів, формуванню їх фахових компетентностей.

### Подяки

Автори висловлюють подяку Спиці О. Г. за надані матеріали до економетричної задачі (задача 1).

### Список використаних джерел

1. Довгий Б. П. Методи економічних обчислень. Лекції для студентів механіко-математичного факультету. Київ, 2022. 134 с.
2. Kobylnyk T. P., Kogut U. P. Системи комп'ютерної математики у навчанні студентів напряму підготовки «інформатика», *Інформаційні технології і засоби навчання*, 2014. 40(2), pp. 50–64.
3. Кальчук І. В., Жигалло Т. В., Собчук В. В. Чичурін О. В. Розв'язування задач аналізу та диференціальних рівнянь засобами комп'ютерної алгебри Mathematica: підручник. Київ: Міленіум, 2021. 420 с.
4. Hřebíček J. Mathematical Modeling of Economic Phenomena with Maple, In *Proc. of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics*. MME 2012, Karviná, Czech Republic, Sept 12-15, 2012, pp. 326-331. URL: [https://csov.vse.cz/download/conferences/mme\\_2012\\_proceedings.pdf](https://csov.vse.cz/download/conferences/mme_2012_proceedings.pdf)



5. Chvatalova Z., Hřebíček J. (2013). Computational finance and finance economics with Maple *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* Vol. 7(5) pp. 541 – 550
6. Chvatalova Z., Simberova I. Economic Phenomena via Mathematical Modelling in Maple System. *Business, Management and Economics Engineering* 2011, 9 (2), pp. 260-276. DOI: <https://doi.org/10.3846/bme.2011.18>.
7. Andraz J., Candeias R., Conceição A. Bridging Symbolic Computation and Economics: A Dynamic and Interactive Tool to Analyze the Price Elasticity of Supply. *Mathematical and Computational Applications*. 2019; 24(4):87. DOI: <https://doi.org/10.3390/mca24040087>
8. Tsilika K. A Mathematica-Based Interface for the Exploration of Inter- and Intra-Regional Financial Flows. *Mathematics*. 2024; 12(6):877. DOI: <https://doi.org/10.3390/math12060877>
9. Радзіховська Л. М., Гусак Л. П., Панчук Ю. С. Побудова багатofакторної регресійної моделі засобами програмного забезпечення Eviews. *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2021, Вип.44. С.54–59. DOI: <http://dx.doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2021-44-09>.
10. Бегун С., Хомюк Н., Подзізей О. Економетричні методи та моделі в прийнятті управлінських рішень в умовах цифрової трансформації. *Економіка та суспільство*, Вип. 66, 2024. DOI: <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2024-66-16>.
11. Жарко Ю. Г., Козлов Ю. В., Мощенко І. О., Нікітенко О. М. Особливості статистичної обробки даних засобами систем комп'ютерної математики. *Радіотехніка : Всеукр. міжвід. наук.-техн. зб.* Харків, 2021. Вип. 206. с. 131–136.
12. Хоменко Ж. М. Аналіз можливостей використання середовищ комп'ютерної математики для розв'язку задач оптимізації систем. *Вісник ЖДТУ*.



Серія "Технічні науки", Вип. 2(82), 2018. с. 174–178. DOI:  
[https://doi.org/10.26642/tn-2018-2\(82\)-174-178](https://doi.org/10.26642/tn-2018-2(82)-174-178)

13. Крохмаль Т. М., Нікітенко О. М. Порівняльний аналіз пакетів Excel, MAPLE, MATLAB при використанні їх під час статистичної обробки даних. *Theory and methods of e-learning*. Вип. 4. 2014. с. 148-153.

14. Körtesi P., Simonka Z., Szabo Z., Guncaga J., Neag R. Challenging Examples of the Wise Use of Computer Tools for the Sustainability of Knowledge and Developing Active and Innovative Methods in STEAM and Mathematics Education. *Sustainability*. v. 14(20) : 12991. 2022. DOI: <https://doi.org/10.3390/su142012991>

15. Економетрика : конспект лекцій : у 2 ч. / укладач: С. В. Коломієць. Суми : Сумський державний університет, 2025. – Ч. 1. – 190 с.

16. Григорків В. С. Моделювання економіки : підручник. Чернівці : Чернівецьк. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. 360 с.

17. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник. Київ: КНЕУ, 2003. 408 с.