



Теорія та методика навчання. Професійна освіта

УДК 378 : 530.1: 517.9

DOI <https://doi.org/10.5281/zenodo.18055512>

Особливості математичного моделювання фізичних процесів з елементами диференціальних рівнянь

Волох Людмила Василівна

к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної фізики та вищої математики,
Київський національний університет технологій та дизайну, 01011, Україна,

Київ, вул. Мала Шияновська, 2,

e-mail: voloh.lv@knutd.edu.ua,

<https://orcid.org/0000-0002-4290-795X>

Олейнікова Ірина Веніамінівна

к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної фізики та вищої математики,
Київський національний університет технологій та дизайну, 01011, Україна,

Київ, вул. Мала Шияновська, 2,

e-mail: olejnikova.iv@knutd.edu.ua,

<https://orcid.org/0000-0003-1756-5203>

Прийнято: 08.12.2025 | Опубліковано: 24.12.2025

***Анотація:** Математичне моделювання відіграє ключову роль у сучасній науці та техніці, оскільки дозволяє описувати складні фізичні, технічні й природні процеси у формалізованому вигляді. Воно дає змогу прогнозувати поведінку систем за різних умов без проведення дорогих або небезпечних експериментів. За допомогою математичних моделей можна аналізувати вплив окремих параметрів, оптимізувати характеристики об'єктів і підвищувати*



ефективність технологічних процесів. Математичне моделювання є основою комп'ютерних симуляцій і цифрових двійників реальних систем. Особливе значення воно має для дослідження мікро- та наномасштабних явищ, де прямі експериментальні вимірювання є складними або неможливими. У роботі розглянуто застосування диференціальних рівнянь як ключового інструменту математичного моделювання фізичних процесів. Проаналізовано їх роль у класичній та квантовій механіці, електродинаміці, оптиці, термодинаміці та статистичній фізиці. Особлива увага приділена сучасним напрямкам нанофізики та нанотеплопереносу, де диференціальні рівняння дозволяють описувати квантові ефекти, теплові процеси, електронний транспорт та хвильові явища в наноструктурах. Розглянуто як аналітичні, так і чисельні методи розв'язування рівнянь, зокрема використання гіперболічних рівнянь, рівняння Больцмана для фононів та сучасних підходів з обчислювальними методами і нейромережами (PINNs). В роботі підкреслюється важливість вивчення таких математичних моделей для розвитку аналітичного та критичного мислення, уміння оцінювати адекватність моделей і обґрунтованого висновку щодо поведінки фізичних систем. Актуальність роботи полягає у поєднанні фундаментальної фізики та сучасних нанотехнологій, що відкриває можливості для оптимізації нанопристроїв, прогнозування їхніх властивостей та підвищення ефективності енерго- та теплообміну на наномасштабі. Робота може бути корисною для студентів, аспірантів і науковців, які займаються математичним моделюванням, нанофізикою, теплопереносом у наноматеріалах та обчислювальними методами у фізиці.

Ключові слова: диференціальні рівняння, математичне моделювання, математична фізика, нанотехнології, нанотеплоперенос.



Features of mathematical modeling of physical processes with elements of differential equations

Volokh Liudmyla

PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Physics and Higher Mathematics, Kyiv National University of Technology and Design, 2 Mala Shyianovska Str., Kyiv, 01011, Ukraine,
e-mail: voloh.lv@knutd.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-4290-795X>

Oleynikova Iryna

PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Physics and Higher Mathematics, Kyiv National University of Technology and Design, 2 Mala Shyianovska Str., Kyiv, 01011, Ukraine,
e-mail: olejnikova.iv@knutd.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0003-1756-5203>

Abstract: *Mathematical modeling plays a key role in modern science and technology, as it allows describing complex physical, technical and natural processes in a formalized form. It allows predicting the behavior of systems under different conditions without conducting expensive or dangerous experiments. With the help of mathematical models, it is possible to analyze the influence of individual parameters, optimize the characteristics of objects and increase the efficiency of technological processes. Mathematical modeling is the basis of computer simulations and digital twins of real systems. It is of particular importance for the study of micro- and nanoscale phenomena, where direct experimental measurements are difficult or impossible. The paper considers the application of differential equations as a key tool for mathematical modeling of physical processes. Their role in classical and quantum mechanics, electrodynamics, optics, thermodynamics, and statistical physics is analyzed. Particular attention is paid to modern trends in nanophysics and*



nanothermophysics, where differential equations allow describing quantum effects, thermal processes, electron transport, and wave phenomena in nanostructures. Both analytical and numerical methods for solving equations are considered, in particular the use of hyperbolic equations, the Boltzmann equation for phonons, and modern approaches with computational methods and neural networks (PINNs). The work emphasizes the importance of studying such mathematical models for the development of analytical and critical thinking, the ability to assess the adequacy of models, and well-founded conclusions about the behavior of physical systems. The relevance of the work lies in the combination of fundamental physics and modern nanotechnologies, which opens up opportunities for optimizing nanodevices, predicting their properties, and improving the efficiency of energy and heat transfer at the nanoscale. The work may be useful for students, graduate students, and researchers involved in mathematical modeling, nanophysics, heat transfer in nanomaterials, and computational methods in physics.

Keywords: *differential equations, mathematical modeling, mathematical physics, nanotechnology, nanothermopropagation.*

Постановка проблеми. Математичне моделювання відіграє ключову роль у сучасній науці та техніці, оскільки дозволяє описувати складні фізичні, технічні й природні процеси у формалізованому вигляді. Воно дає змогу прогнозувати поведінку систем за різних умов без проведення дорогих або небезпечних експериментів. За допомогою математичних моделей можна аналізувати вплив окремих параметрів, оптимізувати характеристики об'єктів і підвищувати ефективність технологічних процесів. Математичне моделювання є основою комп'ютерних симуляцій і цифрових двійників реальних систем. Особливе значення воно має для дослідження мікро- та наномасштабних явищ, де прямі експериментальні вимірювання є складними або неможливими. Таким



чином, математичне моделювання є невід'ємним інструментом розвитку сучасної науки й інженерії.

У зв'язку з цим впровадження у навчальний процес математичного моделювання є надзвичайно актуальним і необхідним у навчальному процесі технічних закладів вищої освіти, оскільки математичне моделювання формує у студентів системне та аналітичне мислення, навички абстрагування й уміння пов'язувати теоретичні знання з реальними інженерними та фізичними задачами. Також воно дозволяє глибше засвоювати фундаментальні дисципліни (математичний аналіз, диференціальні рівняння, фізику, механіку, електротехніку), демонструючи їх практичне застосування. Слід зауважити, що використання математичних моделей і комп'ютерних симуляцій дає змогу досліджувати складні, небезпечні або дорогі для експериментів процеси в умовах навчальної лабораторії.

Опанування методів математичного моделювання готує студентів до роботи з сучасним інженерним програмним забезпеченням і відповідає вимогам ринку праці. Таким чином, інтеграція математичного моделювання в освітній процес технічних вишів підвищує якість підготовки фахівців і робить навчання більш практикоорієнтованим та сучасним.

Математичне моделювання фізичних явищ та процесів — це процес створення формалізованого, кількісного опису реальних фізичних систем з метою аналізу їхньої поведінки, передбачення результатів, оптимізації та управління ними.

Існує багато різних типів математичних моделей для фізичних процесів в загальному вигляді. Так, виділяють моделі статичні та динамічні, диференціальні й інтегральні, детерміністичні та стохастичні, лінійні та нелінійні, геометричні, топологічні, імітаційні, оптимізаційні. Найпоширенішими формами запису математичних моделей є інваріантна, аналітична, алгоритмічна та графічна. В інваріантній формі моделі записують за



допомогою алгебраїчних, диференціальних, інтегральних та інших рівнянь і нерівностей, без урахування методу подальшого аналізу моделі. Аналітична форма – це запис моделі у вигляді аналітичного розв’язку вихідних рівнянь інваріантної моделі. Алгоритмічна форма – це дослідження алгоритму дослідження вихідної моделі. Математичні моделі, записані у графічній формі, – це геометричні та топологічні об’єкти, графи, схеми, графіки, діаграми тощо.

Методи математичної фізики як теорія математичного моделювання фізичних процесів почали активно формуватися наприкінці XVII століття у працях Ісаака Ньютона, присвячених створенню основ класичної механіки, закону всесвітнього тяжіння та теорії світла. У XVIII — першій половині XIX століття ці методи зазнали подальшого розвитку й широкого застосування для дослідження великої кількості фізичних явищ завдяки роботам Жозефа Луї Лагранжа, Леонарда Ейлера, П’єра-Симона Лапласа, Жозефа Фур’є, Карла Гауса, Бернгарда Рімана, М. В. Остроградського та інших науковців. Значний внесок у розвиток методів математичної фізики зробили також О. М. Ляпунов і В. А. Стеклов. Починаючи з другої половини XIX століття, ці методи успішно застосовувалися для аналізу математичних моделей фізичних явищ, пов’язаних із різноманітними фізичними полями та хвильовими процесами в електродинаміці, акустиці, теорії пружності, гідро- та аеродинаміці, а також в інших галузях дослідження суцільних середовищ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

1. Сучасні дослідження зосереджені переважно на чисельному розв’язуванні диференціальних рівнянь складних фізичних моделей. У світовій науковій літературі значний внесок у розвиток математичного моделювання зробив D.G. Steel [6] – книга присвячена рівнянню Шредінгера та квантовому опису поширених систем (частинки, квантові точки, осциляції, атоми і кристали), та реальній динаміці квантових систем, включно зі спіном, квантовою оптикою, випромінюванням, та рівняннями для двохстанових систем. Felix



Finster, Sebastian Kindermann, Jan-Hendrik Treude в своїй праці [9] включають математичні методи (варіаційні принципи, оператори, функціональний аналіз), які широко використовуються в математичній фізиці. Також вони пропонують основні поняття інтегро-диференціальних еліптичних рівнянь, які відіграють ключову роль у сучасних задачах математичної фізики (у тому числі стохастичних процесах, квантових ансамблях і нелокальних моделей). Sulabha K. Kulkarni в [15] описує прості математичні моделі для прогнозування властивостей наноструктур.

Серед українських учених є багато вчених, які зробили значний внесок у розвиток сучасної теорії диференціальних рівнянь і математичного моделювання фізичних процесів. У своєму дослідженні Білецький В. С. [1] виклав основи моделювання технологічних процесів і пристроїв. Увага акцентована на методах фізичного і математичного моделювання на основі критеріїв подібності, методу розмірностей, аналогій. Балтовський О.О., Форос Г.В, Сіфоров О.І. [2] розглянули найважливіші теоретичні та практичні принципи математичного моделювання, широко поширені в сучасних умовах. Також увага приділена широкопоширеним методам моделювання та побудови математичних моделей, наведені приклади елементів математичного моделювання фізичних процесів. Вакал Є.С. [3,5] приділяє увагу концептуальним і методологічним основам застосування методу Фур'є до розв'язання мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів у різних областях. Ловейкін А. В. у роботі [4] використав рівняння Лагранжа другого роду для складання математичної моделі з кількома ступенями свободи, після чого розв'язано систему нелінійних диференціальних рівнянь чисельними методами. Досліджуються як високочастотні коливання ланок механізму, так і низькочастотні повільні коливання вантажу, а також вплив таких процесів на динамічні навантаження та продуктивність механізму. Boyko I.V., Petryk M.R., Khimich O.M., Porov O.V. в [11] проводять дослідження, присвячене методам математичного моделювання



складних наноструктур і процесів, включно з високопродуктивними обчисленнями.

Таким чином, аналіз сучасних публікацій свідчить, що диференціальні рівняння залишаються центральним інструментом математичного моделювання фізичних процесів, а актуальні дослідження спрямовані на вдосконалення чисельних методів їх розв'язування та розширення сфер практичного застосування в інженерії, фізиці та міждисциплінарних галузях.

Проблеми, які не були вирішені в попередніх дослідженнях:

- Вивчення новітніх застосувань диференціальних рівнянь для математичного моделювання фізичних процесів.
- Основні властивості застосування математичного моделювання в нано- та мікротехнологіях в контексті вивчення фізики для технічних спеціальностей.

Ці питання будуть розглянуті та розкриті в даній статті, що дозволить заповнити наукову прогалину та запропонувати нові підходи до застосування диференціальних рівнянь у вивченні фізики в технічних університетах.

Мета дослідження. Обґрунтувати доцільність і розкрити шляхи впровадження застосування диференціальних рівнянь як складової математичного моделювання фізичних процесів у процес навчання в технічних закладах вищої освіти, а також оцінити ефективність цього підходу на основі аналітичного дослідження.

Завдання дослідження

- Проаналізувати теоретичні засади математичного моделювання.
- Визначити особливості застосування математичного моделювання у технічних вишах.
- Виявити потенціал диференціальних рівнянь як підходу для розвитку пізнавальної активності студентів при вивченні фізики.



- Розробити методичку ефективного впровадження основних типів диференціальних рівнянь у курс фізики, зокрема при вивченні нанотехнологій.
- Провести експериментальне дослідження ефективності цієї методички.

Методи дослідження. Аналіз наукової літератури, педагогічне спостереження, анкетування, педагогічний експеримент, статистичні методи обробки результатів.

Наукова новизна дослідження. Уточнено та доповнено методичку впровадження основних типів диференціальних рівнянь у курс фізики у технічному виші з урахуванням специфіки предмета і рівня підготовки студентів.

Практична значущість. Результати дослідження можуть бути використані викладачами вищої математики технічних вишів для підвищення якості навчання та мотивації студентів до вивчення предмета.

Виклад основного матеріалу дослідження. Математичне моделювання у фізиці використовується надзвичайно часто і є фундаментальним інструментом для опису, прогнозування та розуміння фізичних явищ, від поведінки елементарних частинок до космічних систем; це не просто допоміжний метод, а невід'ємна частина сучасної фізики, що дозволяє розв'язувати складні рівняння та імітувати експерименти за допомогою комп'ютерів. Воно перетворює спостережувані явища на абстрактні моделі (диференціальні рівняння, інтеграли, функціонали), які піддаються аналізу, дозволяє виявляти закономірності, які складно або неможливо спостерігати експериментально; дає змогу перевіряти теорії та гіпотези на рівні моделей до проведення фізичних експериментів.

Ключові аспекти математичного моделювання:

✓ Прогнозування та пояснення: Моделі допомагають передбачати результат процесів (наприклад, траєкторію руху, еволюцію системи) та пояснювати механізми явищ, які важко спостерігати в реальних умовах.



✓ Розв'язання складних задач: Фізичні рівняння (диференціальні, статистичні тощо) часто не мають аналітичних розв'язків, тому їх розв'язують чисельними методами за допомогою комп'ютерних моделей.

✓ Проектування та оптимізація: Застосовується для розробки нових приладів, систем, оптимізації їх роботи, а також для керування процесами (наприклад, в електротехніці).

✓ Автоматизація експерименту: Математичні моделі обробляють результати експериментів та створюють віртуальні лабораторні роботи, що доповнює традиційне навчання.

✓ Універсальність: Використовується у всіх розділах фізики: від класичної механіки (рівняння руху) до квантової теорії поля та астрофізики.

Основними цілями математичного моделювання є:

1. Формалізація фізичних явищ – переведення експериментально спостережуваних процесів у математичну форму через рівняння, функції та алгоритми.

2. Прогнозування поведінки систем – визначення динаміки та розвитку процесів у різних умовах без прямого проведення експериментів.

3. Аналіз закономірностей і взаємозв'язків – виявлення причинно-наслідкових зв'язків між фізичними величинами та процесами.

4. Перевірка теорій і гіпотез – оцінка адекватності фізичних процесів шляхом порівняння моделей із експериментальними даними.

5. Оптимізація та управління процесами – пошук ефективних стратегій керування системами та технологічними процесами.

Диференціальні рівняння є одним із ключових елементів математичного моделювання фізичних процесів, оскільки вони описують закони зміни фізичних величин у часі та просторі. Саме за їх допомогою формалізуються фундаментальні закони фізики, такі як закони механіки, теплопровідності, електродинаміки та квантової теорії. Диференціальні рівняння дозволяють



встановити зв'язок між причинами та наслідками фізичних явищ і прогнозувати поведінку систем за різних умов. У більшості реальних задач аналітичні розв'язки таких рівнянь відсутні, що зумовлює необхідність застосування чисельних методів. Таким чином, диференціальні рівняння становлять математичну основу сучасного моделювання та комп'ютерного дослідження фізичних процесів.

У сучасній фізиці диференціальні рівняння в частинних похідних активно застосовуються для опису процесів, що відбуваються на нано- та мікромасштабах, де класичні підходи потребують суттєвого уточнення або поєднання з квантовими моделями. У нанотехнологіях вони є основою математичного моделювання електронних, теплових, оптичних і механічних явищ у наноструктурах.

1. Нанофізика та квантові системи. Найчастіше використовується рівняння Шредингера (стаціонарне й нестаціонарне) для опису квантових точок, нанодротів, тонких плівок і гетероструктур.

У нанофізиці досліджуються фізичні процеси, що відбуваються на масштабах порядку нанометрів, де класичні закони фізики вже не дають повного опису явищ. У таких системах домінуючу роль відіграють квантові ефекти, а поведінка частинок визначається хвильовою природою матерії. Основним математичним апаратом для опису цих процесів є диференціальні рівняння квантової механіки. Центральне місце в моделюванні квантових наноструктур посідає рівняння Шредингера, яке є диференціальним рівнянням у частинних похідних. Воно використовується для опису динаміки електронів у квантових точках, нанодротах, квантових ямах та багат шарових гетероструктурах. Розв'язки цього рівняння дозволяють визначати енергетичні рівні, хвильові функції та ймовірнісні характеристики електронів у нанорозмірних системах.

У наноструктурах з просторовим обмеженням руху носіїв заряду диференціальні рівняння дають змогу описати ефект квантового розмірного



обмеження, коли енергетичний спектр стає дискретним. Це явище лежить в основі роботи квантових точок, які застосовуються в лазерних діодах, світлодіодах нового покоління та біомедичних маркерах. Математичне моделювання таких систем потребує розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з потенціалами складної форми.

Крім рівняння Шредінгера, у нанофізиці широко використовуються системи пов'язаних диференціальних рівнянь, що враховують взаємодію частинок між собою та з зовнішніми полями. Наприклад, при моделюванні транспорту електронів у нанопристроях застосовуються рівняння квантової кінетики, які поєднують диференціальні рівняння з інтегральними членами. Це дозволяє описувати тунелювання, розсіювання та нелокальні ефекти, характерні для наномасштабів.

Особливе значення мають диференціальні рівняння у дослідженнях квантового транспорту в наноструктурах. Вони використовуються для аналізу провідності, струм–вольтних характеристик та впливу дефектів і домішок на електронні властивості матеріалів. Такі моделі є основою для проектування наноелектронних компонентів, зокрема транзисторів нанометрового розміру.

Таким чином, диференціальні рівняння в нанофізиці та квантових системах виконують не лише описову, але й прогностичну функцію. Вони дозволяють глибоко зрозуміти фізичні механізми, що визначають поведінку наноструктур, та є невід'ємною частиною сучасних нанотехнологій і квантових пристроїв.

2. Нанотеплоперенос. На нанорівні класичне рівняння теплопровідності Фур'є часто втрачає адекватність. Тому тут застосовуються узагальнені диференціальні рівняння теплопереносу, гіперболічні та баллістичні моделі тепла, рівняння Больцмана для фононів. Ці моделі використовуються для проектування нанопристроїв, де теплові втрати критично важливі. Нанотеплоперенос є одним із ключових напрямів сучасної нанофізики, оскільки ефективне керування тепловими процесами на наномасштабі має вирішальне



значення для стабільної роботи наноелектронних і нанофотонних пристроїв. На відміну від макроскопічних систем, у наноструктурах теплові процеси істотно залежать від квантових, розмірних та міжфазних ефектів, що зумовлює необхідність використання спеціалізованих математичних моделей.

Класичне рівняння теплопровідності Фур'є, яке є параболічним диференціальним рівнянням, у багатьох нанорозмірних системах втрачає адекватність. Це пов'язано з тим, що на наномасштабах порушується припущення про локальну термодинамічну рівновагу, а перенесення тепла набуває баллістичного або квазібаллістичного характеру. У зв'язку з цим у моделях нанотеплопереносу використовуються узагальнені диференціальні рівняння теплопереносу, які враховують скінченну швидкість поширення теплових збурень.

Одним із поширених підходів є застосування гіперболічного рівняння теплопровідності, яке містить часові похідні вищого порядку. Такі рівняння дозволяють описати хвильовий характер перенесення тепла та усунути нефізичну властивість миттєвого поширення температурних збурень, притаманну класичній теорії Фур'є. Це особливо важливо для моделювання ультрашвидких теплових процесів у тонких плівках і наноструктурах.

Для більш детального опису теплопереносу на нанорівні широко застосовується рівняння Больцмана для фононів, яке є складним диференціально-інтегральним рівнянням. Воно дозволяє врахувати мікроскопічні механізми перенесення тепла, зокрема розсіювання фононів на межах, дефектах та інтерфейсах наноструктур. На основі цього рівняння будуються чисельні моделі теплових процесів у наноматеріалах з високою точністю.

Диференціальні рівняння нанотеплопереносу активно використовуються для аналізу теплових властивостей нанокомпозитів, багатошарових структур та термоелектричних матеріалів. Вони дають змогу прогнозувати розподіл



температури, теплові потоки та коефіцієнти теплопровідності, що є критично важливим при проєктуванні енергоефективних нанопристроїв.

3. Нанооптика. Диференціальні рівняння в частинних похідних є ключовим інструментом для опису поведінки світла та його взаємодії з наноструктурами. Рівняння Максвелла у диференціальній формі має вигляд

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

та описує поведінку електромагнітних полів в наноплівках, фотонних кристалах і метаматеріалах. Для аналізу локалізованих хвильових режимів або плазмонних резонансів застосовують нелінійне рівняння Шредінгера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\mathbf{r})\Psi + \gamma |\Psi|^2 \Psi,$$

де γ описує нелінійні ефекти взаємодії світла з наноструктурою, оператор Лапласа ∇^2 описує просторову кривизну хвиль. При дослідженні теплопереносу на наномасштабі використовують рівняння дифузії:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q(\mathbf{r}, t),$$

що дозволяє моделювати нагрівання наноструктур під дією лазерного або іншого оптичного випромінювання. Завдяки таким диференціальним рівнянням можна прогнозувати спектральні характеристики, оптимізувати геометрію та матеріали нанопристроїв і досліджувати динаміку фотонних та плазмонних режимів.

4. Наномеханіка та MEMS/NEMS. Диференціальні рівняння коливань застосовуються для опису нанорезонаторів, наноелектромеханічних систем (NEMS), механічної стабільності наноструктур. Такі моделі дозволяють прогнозувати резонансні частоти та динамічну поведінку нанопристроїв.



5. Нанofлюїдика та дифузійні процеси. Модифіковані диференціальні рівняння Нав'є–Стокса і рівняння дифузії використовуються для опису руху рідин у наноканалах, транспорту іонів і молекул, біофізичних нанопроцесів. Рівняння таких типів мають застосування в медицині, біосенсорах і доставці ліків.

6. Поєднання з сучасними чисельними та AI-методами. Новітнім напрямом є поєднання диференціальних рівнянь з чисельними методами високої точності, physics-informed neural networks (PINNs), цифровими двійниками наноструктур.

Це дозволяє моделювати складні нанофізичні процеси швидше й точніше, ніж традиційними методами.

Висновки. Отже, диференціальні рівняння не лише залишаються актуальними в сучасній фізиці, а й набувають нових форм застосування в нанотехнологіях. Вони є основним інструментом опису квантових, теплових, електромагнітних і механічних процесів на нанорівні та лежать в основі проектування новітніх нанопристроїв і матеріалів. Дослідження ефективності застосування диференціальних рівнянь при математичному моделюванні фізичних процесів на прикладі нанопроцесів в контексті навчання в технічних університетах дозволило сформулювати кілька ключових висновків:

1. Диференціальні рівняння є фундаментальним інструментом для моделювання фізичних процесів у наномасштабі. Вони дозволяють описувати квантові ефекти, теплоперенос, електронний транспорт і хвильові явища в наноструктурах. Використання гіперболічних і квантових рівнянь забезпечує точне моделювання процесів, де класичні закони не можуть бути застосовані. Чисельні методи, у поєднанні з диференціальними рівняннями, дозволяють прогнозувати властивості наноматеріалів і поведінку нанопристроїв. Таким чином, математичне моделювання на основі диференціальних рівнянь є ключовим для розвитку нанотехнологій і створення нових високотехнологічних матеріалів.



2. Диференціальні рівняння є основним інструментом для опису теплових процесів у наноструктурах. Вони дозволяють моделювати як класичне дифузійне, так і баллістичне та хвильове перенесення тепла на наномасштабі. Використання гіперболічних рівнянь і рівняння Больцмана для фононів забезпечує точне відтворення теплових явищ, які не підкоряються законам класичної теплопровідності. Чисельні методи, інтегровані з цими рівняннями, дозволяють прогнозувати температурні поля, теплові потоки та ефективність нанопристроїв. Таким чином, математичне моделювання нанотеплопереносу є критично важливим для оптимізації наноматеріалів і підвищення продуктивності наноелектронних та нанофотонних систем.

3. Розвиток аналітичного мислення. Вивчення диференціальних рівнянь та їх застосування у фізиці, нанофізиці та нанотеплопереносі сприяє розвитку аналітичного мислення, оскільки студенти змушені розглядати складні системи, розбивати їх на окремі компоненти та встановлювати логічні зв'язки між змінними та процесами. Робота з математичними моделями вчить уважності до деталей та точності формулювань, адже невелика похибка в побудові рівняння або кроку чисельного методу може призвести до неправдивих висновків.

4. Розвиток критичного підходу. При розв'язуванні реальних фізичних задач формується критичне мислення, бо потрібно оцінювати адекватність моделей, порівнювати аналітичні та чисельні результати, аналізувати обмеження та похибки методів. Крім того, студенти набувають здатності приймати обґрунтовані рішення, наприклад, обирати оптимальні чисельні методи для конкретної задачі або визначати, які ефекти можна враховувати, а які можна спростити.

Таким чином, вивчення сучасних підходів до математичного моделювання фізичних процесів не лише дає знання про нанофізику та нанотеплоперенос, але й розвиває у студентів логічне, критичне та системне мислення, що є необхідним для будь-якого науковця чи інженера сучасного рівня.



Список використаних джерел

1. Білецький В. С. Моделювання у нафтогазовій інженерії : навч. посібник / В. С. Білецький ; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Львів : Новий Світ – 2000, 2021. 306 с.
2. Балтовський О.О., Форос Г.В, Сіфоров О.І. Основи математичного моделювання/ За заг. ред. д.т.н., доц. О.А. Балтовського. Одеський держ. університет внутр. довідок, 2023. 125 с.
3. Вакал Є.С., Ловейкін А. В. Методи математичної фізики в прикладах і задачах: навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. К.: Видавець Кравченко Я.О. 2020. 188 с.
4. Loveikin V., Romasevych Y., Loveikin A., Liashko A., Pochka K. Dynamic analysis of the joint movement of derricking mechanisms and lifting mechanisms of a load f steady-state tur of a jib crane Journal Strength of Materials and Theory of Structures. 2025. №114. pp. 111-126.DOI: 10.32347/2410-2547.2024.114.
5. Вакал Є. С., Вакал Ю.Є. Класифікація рівнянь із частинними похідними звикористанням системи MATLAB. К.: Основа. 2023. 104 с.
6. D.G. Steel. Introduction of Quantum Nanotechnology - A Problem Focused Approach. - Oxford University Press, 2021.-370 pp.
7. Грудкіна Н. С., Шевцов С. О. Рівняння математичної фізики: посібник до практичних занять і самостійної роботи. Краматорськ: ДДМА. 2019. 47 с.
8. Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика» / Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут. – Одеса : Одеськ. нац.. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 194 с.
9. Felix Finster, Sebastian Kindermann, Jan-Hendrik Treude. Causal Fermion Systems: An Introduction to Fundamental Structures, Methods and Applications. 2024. 375 p.
10. Fernández-Real, Ros-Oton. Integro-Differential Elliptic Equations, 2024. - 320 p.



11. Boyko I.V., Petryk M.R., Khimich O.M., Popov O.V. Methods and high-performance technologies of mathematical modeling of complex multi-component systems, multy-dimensional nanostructures and processes: monograph – Kyiv: National Academy of Sciences of Ukraine: Institute of Cybernetics named after V.M. Glushkov, 2024. – 161 p.
12. Громик А., Конет І., Пилипюк Т. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому півпросторі. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. Випуск 27. 2025. 5-18 с.
13. Roy A. Biological Synthesis of Nanocatalysts and Their Applications / A. Roy, A. Elzaki , V. Tirth [et al.] // Catalysts. – 2021. – V. 11. – P. 1494.
14. Pandit C. Biological Agents for Synthesis of Nanoparticles and Their Applications / C. Pandit, A. Roy, S. Ghotekar [et al.] // Journal of King Saud University – Science. – 2022. – V. 34. – P. 101869.
15. Sulabha K. Kulkarni Nanotechnology: Principles and Practices. 3rd Ed. – New Delhi : Co-published by Springer International Publishing, Cham, Switzerland, with Capital Publishing Company, 2022 – 403 p.