



Теорія і практика навчання

УДК [519.716:517.11]:378.016

DOI <https://doi.org/10.5281/zenodo.18827236>

Порівняльна характеристика методів синтезу канонічних форм алгебри Жегалкіна

Швай Ольга Леонідівна

кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу
та статистики Волинського національного університету

імені Лесі Українки, 43025, м. Луцьк, проспект Волі 13, Україна,

Shvai.Olga@gmail.com,

<https://orcid.org/0000-0001-9457-7297>

Прийнято: 11.02.2026 | Опубліковано: 28.02.2026

Анотація. У статті обґрунтовано важливу роль освітнього компонента «Дискретна математика» у професійній підготовці здобувачів вищої освіти галузі знань «Е Природничі науки, математика та статистика» за спеціальністю Е7 «Математика». Опанування цієї дисципліни сприяє не лише засвоєнню теоретичного апарату, а й формуванню у здобувачів ключових когнітивних навичок: здатності обирати адекватні математичні методи для розв'язання прикладних задач та верифікувати умови застосовності математичних тверджень. **Метою** статті є порівняльний аналіз методів синтезу канонічних форм алгебри Жегалкіна та обґрунтування методичних шляхів розвитку критичного мислення здобувачів під час вивчення цієї теми. Для досягнення мети використано методи дослідження – аналіз наукової літератури в контексті дослідження; вивчення та узагальнення передового педагогічного і власного досвіду роботи у ЗВО, опитування, анкетування.



Апробація запропонованих методичних прийомів здійснювалася із застосуванням методів організації педагогічного експерименту в реальних умовах освітнього процесу факультету інформаційних технологій і математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Основні результати. *У роботі проаналізовано різні методи побудови поліномів Жегалкіна (метод невизначених коефіцієнтів, метод тотожних перетворень, метод побудови за ДДНФ булевої функції) та наведено відповідні приклади. Доведено, що ефективність кожного методу залежить від кількості змінних булевої функції, форми подання вихідних даних та цільового середовища реалізації. Авторами запропоновано впровадження проблемно-пошукових завдань, що передбачають варіативність розв'язання та організацію дискусій. Це сприяє розвитку вмінь здобувачів продукувати власні ідеї та корегувати їх під впливом аргументів опонентів. Для активізації критичного мислення виокремлено прийоми «навмисної помилки», порівняльного аналізу та аналізу складності.*

Висновки дослідження підкреслюють, що формування критичного мислення здобувачів найбільш ефективно відбувається у ситуації вибору. Навчання не повинно обмежуватися репродукуванням одного алгоритму; натомість студенти мають самотійно оцінювати складність задачі та обирати найбільш раціональний метод синтезу.

Ключові слова: *булеві функції, поліном Жегалкіна, методи побудови поліномів Жегалкіна, критичне мислення, майбутні математики.*



Comparative characteristics of methods for synthesizing canonical forms of Zhegalkin algebra

Olha Shvai

Candidate of Pedagogical Sciences, Docent, Docent of the Department of
Mathematical Analysis and Statistics at the Faculty of Information Technologies and
Mathematics of the Lesya Ukrainka Volyn National University,
43025, Lutsk, Voli Avenue 13, Ukraine,

Shvai.Olga@gmail.com,

<https://orcid.org/0000-0001-9457-7297>

Abstract. *The article substantiates the important role of the "Discrete Mathematics" educational component in the professional training of higher education students in the field of study E "Natural Sciences, Mathematics and Statistics," specialty E7 "Mathematics." Mastering this discipline facilitates not only the acquisition of the theoretical apparatus but also the formation of key cognitive skills: the ability to select appropriate mathematical methods for solving applied problems and the verification of the applicability conditions for mathematical statements.*

The purpose of the article is to conduct a comparative analysis of methods for synthesizing canonical forms of Zhegalkin algebra and to substantiate methodological approaches for developing students' critical thinking while studying this topic. Research methods include the analysis of scientific literature, the generalization of pedagogical experience in higher education institutions, surveys, and questionnaires. The approbation of the proposed teaching techniques was conducted through a pedagogical experiment at the Faculty of Information Technologies and Mathematics of Lesya Ukrainka Volyn National University.

Results. *The study analyzes various methods for constructing Zhegalkin polynomials (the method of undetermined coefficients, the method of identity*



transformations, and the method of construction based on the PCNF of a Boolean function) and provides relevant examples. It is demonstrated that the efficiency of each method is not absolute and depends on the number of variables n , the format of the input data, and the target implementation environment. The authors propose the introduction of problem-based tasks that allow for various solution methods and the organization of discussions regarding the results. This approach fosters students' ability to generate ideas, defend them, and, if necessary, adjust them under the reasoned influence of opponents. To activate critical thinking during practical classes, the following techniques are highlighted: "deliberate error," comparative analysis, and complexity analysis.

Conclusions. *The research findings emphasize that the formation of students' critical thinking occurs most effectively in decision-making situations. Instruction should not be limited to the reproduction of a single algorithm; instead, students must independently evaluate the complexity of a task and choose the most rational synthesis method.*

Keywords: *Boolean functions, Zhegalkin polynomial, methods of constructing Zhegalkin polynomials, critical thinking, future mathematicians.*

Постановка проблеми. Освітній компонент (ОК) «Дискретна математика» відіграє важливу роль у професійній підготовці здобувачів вищої освіти галузі знань «Е Природничі науки, математика та статистика» (спеціальність «Е7 Математика»). У великій мірі це зумовлено стрімкою цифровізацією науки, коли дискретні структури стають основою для побудови складних інформаційних та аналітичних систем.

У процесі опанування курсу здобувачі не лише засвоюють теоретичний апарат, а й оволодівають ключовими когнітивними навичками: здатністю обирати адекватні математичні методи для розв'язання прикладних задач, верифікувати умови застосовності математичних тверджень та здійснювати



коректну екстраполяцію теоретичних моделей на нові класи об'єктів. Особлива цінність дискретної математики полягає в її інтегративній ролі – вона виступає дієвим інструментом для демонстрації практичного втілення абстрактних математичних методів у найсучасніших високотехнологічних галузях, від криптографії до моделювання нейронних мереж.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема вдосконалення методики викладання дискретної математики в закладах вищої освіти перебуває у центрі уваги багатьох українських науковців. Дослідники розглядають цю дисципліну як фундаментальну базу для розвитку логічного та алгоритмічного мислення майбутніх фахівців (математиків, вчителів математики та інформатики, програмістів, інженерів).

Теоретико-методологічні основи формування змісту навчання та структурування курсів дискретної математики ґрунтовно розроблені науковцями Ю. Бардачовим, О. Борисенко, С. Балогою, Б. Гнатів, Л. Гнатів, В. Гладун, М. Матвієнком, Ю. Нікольським, В. Пасічником, Ю. Щербиною, Ю. Капітоновою, С. Кривим, О. Летичевським, Г. Луцьким, М. Печуріним та іншими авторами підручників. Зокрема, їхні дослідження спрямовані на створення логічно послідовної системи викладу складних абстрактних концепцій дискретної математики у межах університетських програм [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) під час викладання дискретної математики відображено у дослідженнях М. Друшляк, Т. Лукашова, Л. Скасків. Науковці досліджують особливості навчання майбутніх вчителів математики розв'язувати задачі теорії графів із використанням інструментів Geogebra [8].

Схожий вектор досліджень простежується у працях С. Рудницького, В. Колмакової, С. Шарова, О. Жерновникова, які обґрунтовують що для активізації навчальної діяльності та підвищення зацікавленості у вивченні курсу «Дискретна



математика» потрібно застосовувати інноваційні підходи та сучасні технології [9, 10]. Автори доводить, що впровадження інтерактивних технологій навчання та інформаційно-комунікаційних технологій під час вивчення дискретної математики дозволяє підвищити пізнавальний інтерес здобувачів вищої освіти до вивчення дисципліни. Використання проектної діяльності надає можливість розвинути у здобувачів вищої освіти здатність застосовувати отримані знання у різних ситуаціях, сформувати у здобувачів соціально-комунікативні навички. Застосування ІКТ при підготовці проектів може автоматизувати рутинні процеси, що сприятиме поліпшенню ефективності управління проектом у процесі його підготовки та реалізації [10].

Окремий масив досліджень українських та зарубіжних вчених присвячений цифровізації освітнього процесу [11, 12, 13, 14]. Так, науковці М. Медведєва та В. Колмакова спеціалізуються на розробці та впровадженні персональних освітніх web-ресурсів. Розроблений ними ресурс дозволяє здобувачам розглянути теоретичний матеріал з дискретної математики, виконати практичні завдання, ознайомитися з методичними матеріалами до самостійної роботи, пройти тестування з дисципліни тощо [13].

Z. Duan, J. Wang, F. Li, T.Wang досліджують використання ІКТ для проведення онлайн тестування з дискретної математики з можливістю надання рекомендацій за результатами наданої відповіді [14].

Дослідники вважають, що за рахунок різноманітності інтерактивних технологій та засобів ІКТ викладачі мають можливість застосувати різні шляхи активізації пізнавальної діяльності здобувачів вищої освіти та привернути їх увагу до вивчення дискретної математики та інших математичних дисциплін.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Попри значний науковий інтерес до питання вивчення дискретної математики, існує низка проблем, які потребують додаткового дослідження. Зокрема, зосередити



увагу дослідників і практиків необхідно на специфіці формування критичного мислення здобувачів при вивченні різних розділів дискретної математики.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Мета дослідження полягає у проведенні порівняльного аналізу методів синтезу канонічних форм алгебри Жегалкіна та обґрунтуванні методичних шляхів формування критичного мислення здобувачів вищої освіти галузі знань «Е Природничі науки, математика та статистика» спеціальності «Е7 Математика» у процесі вивчення цієї теми на заняттях з дискретної математики.

Методи дослідження – аналіз наукової літератури в контексті дослідження; вивчення та узагальнення передового педагогічного і власного досвіду роботи у ЗВО; опитування, анкетування здобувачів для виявлення рівня сформованості аналітичних навичок та оцінки ефективності запропонованих методичних підходів.

Апробація запропонованих методичних прийомів здійснювалася із застосуванням методів організації педагогічного експерименту в реальних умовах освітнього процесу факультету інформаційних технологій і математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням здобутих наукових результатів (Результати дослідження).

Формула $P(\tilde{x}^n) = k_1 \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_s$, де $k_1, k_2, \dots, k_s$ – попарно різні монотонні кон'юнкції змінних із множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, називається поліномом Жегалкіна [15].

Важливою властивістю, що обґрунтовує використання поліномів Жегалкіна як канонічних форм, є теорема:

Будь-яку булеву функцію можна єдиним способом зобразити у формі полінома Жегалкіна.

Єдиність побудови полінома Жегалкіна гарантує, що незалежно від обраного методу синтезу, кінцевий результат завжди буде однаковим. Це робить



поліном Жегалкіна надійним інструментом для ідентифікації та порівняння логічних функцій.

Практична значущість поліномів Жегалкіна виходить далеко за межі теоретичних досліджень. Вони є базовим інструментом у сучасній криптографії (зокрема при проектуванні S-блоків та аналізі шифрів на стійкість до лінійного криптоаналізу), у теорії кодування для побудови кодів Ріда-Маллера, у синтезі логічних схем, де мінімізація кількості елементів дозволяє оптимізувати енергоспоживання та площу кристала цифрових пристроїв.

Існують різні методи побудови поліномів Жегалкіна, зокрема метод невизначених коефіцієнтів, метод тотожних перетворень, за ДДНФ булевої функції тощо.

1. Метод невизначених коефіцієнтів.

Метод невизначених коефіцієнтів базується на представленні булевої функції як лінійної комбінації всіх можливих кон'юнкцій змінних.

Для функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ записують найбільш загальний вигляд полінома Жегалкіна $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Зокрема, для функції від двох змінних загальний вигляд полінома:

$$P(x, y) = c_0 \oplus c_1x \oplus c_2y \oplus c_3xy,$$

від трьох змінних:

$$P(x, y, z) = c_0 \oplus c_1x \oplus c_2y \oplus c_3z \oplus c_4xy \oplus c_5xz \oplus c_6yz \oplus c_7xyz$$

Для кожного двійкового набору $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ складають рівняння

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Отримують систему з 2^n рівнянь. Розв'язки цієї системи є коефіцієнтами полінома $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f = x \vee y$ методом невизначених коефіцієнтів.

Розв'язання

Записуємо загальний вигляд полінома Жегалкіна від двох змінних



$$P(x, y) = c_0 \oplus c_1x \oplus c_2y \oplus c_3xy.$$

Прирівняємо значення функції $f = x \vee y$ та полінома на всіх чотирьох наборах значень змінних і одержимо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 = c_0, \\ f(0,1) = 1 = c_0 \oplus c_2, \\ f(1,0) = 1 = c_0 \oplus c_1, \\ f(1,1) = 1 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3, \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є $c_0=0$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=1$.

Звідси отримуємо, що $f = x \vee y = x \oplus y \oplus xy$.

Відповідь: $f = x \oplus y \oplus xy$

Зауважимо, що даний метод вимагає від здобувачів розуміння міжпредметних зв'язків між дискретною математикою та лінійною алгеброю.

2. Побудова полінома Жегалкіна на основі тотожних перетворень.

Для булевої функції будують рівносильну формулу, в якій є лише операції кон'юнкції та заперечення, а потім позбуваються заперечень змінних за формулою: $\bar{x} = x \oplus 1$.

Отриману формулу спрощують.

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f = x \vee y$ на основі тотожних перетворень.

Розв'язання

$$\begin{aligned} f = x \vee y &= \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = (x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1) \oplus 1 = \\ &= xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \end{aligned}$$

Відповідь: $f = xy \oplus x \oplus y$

Даний метод вимагає від здобувачів володіння законами відповідних алгебр.

3. Метод побудови за ДДНФ булевої функції.



Метод доцільно застосовувати тоді, коли функцію задано ДДНФ або цю форму легко знайти. Спочатку замінюють усі диз'юнкції на суму Жегалкіна, далі всюди замінюють $\bar{x}$ на $x \oplus 1$, розкривають дужки та спрощують отриманий вираз, використовуючи закони ідемпотентності для кон'юнкції та зведення подібних членів.

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f(x, y, z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz = xy\bar{z} \oplus \bar{x}yz \oplus x\bar{y}z \oplus xyz = \\ &= xy(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xyz = \\ &= xyz \oplus xy \oplus xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz = \\ &= xy \oplus xz \oplus yz \end{aligned}$$

Відповідь: $f(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz$

Якщо метод тотожних перетворень вимагає високої концентрації уваги здобувачів на кожному етапі спрощення, то метод ДДНФ пропонує чітко структурований алгоритм, що знижує ризик суб'єктивних помилок. Проте, реалізація даного методу вимагає особливої уваги до перетворень, зокрема до дотримання точності при розкритті великої кількості дужок.

На практиці часто виникає питання вибору найбільш раціонального методу отримання полінома для конкретної функції. Ефективність кожного з розглянутих методів не є абсолютною і залежить від кількості змінних n , форми подання вихідних даних та цільового середовища реалізації (ручне обчислення чи програмний алгоритм). Так, метод невизначених коефіцієнтів залишається переважно дидактичним інструментом, що найкраще ілюструє математичну суть рівності значень функції та полінома; метод перетворень – сприяє глибокому розумінню логічних законів.

Під час викладання ОК «Дискретна математика» у Волинському національному університеті імені Лесі Українки майбутнім математикам



пропонується низка проблемно-пошукових завдань, при розв'язанні яких можливе використання різних методів побудови поліномів Жегалкіна.

Доцільно організувати дискусію, що сприятиме виробленню у здобувачів умінь продукувати ідеї, відстоювати та при необхідності координувати їх під аргументованим впливом опонентів.

Для активізації критичного мислення здобувачів під час практичних занять ми пропонуємо використовувати такі прийоми:

- *Навмисної помилки.* Викладач демонструє синтез полінома одним із методів, допускаючи типову логічну або розрахункову помилку. Завдання здобувачів – не просто знайти її, а обґрунтувати, чому такий крок порушує властивості булевого простору.

- *Порівняльний.* Після розв'язання задачі трьома способами, здобувачі мають написати коротке резюме: «Який метод є оптимальним для даної функції».

- *Аналіз складності.* Обчислення кількості кроків (ітерацій) для кожного методу, що готує підґрунтя для розуміння складності алгоритмів.

Приклад. Чи правильно знайдено поліном Жегалкіна для функції:

$$f(x, y) = \bar{x} \wedge (x \vee y) ?$$

Розв'язання

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \bar{x} \wedge (x \vee y) = (x \oplus 1)(x \oplus y \oplus xy) = \\ &= xx \oplus xy \oplus xxy \oplus x \oplus y \oplus xy = \\ &= x \oplus xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus xy = \\ &= x \oplus y \oplus xy \end{aligned}$$

Критичний аналіз розв'язання.

Студенти повинні знайти логічну помилку у перетвореннях, яка полягала у застосуванні закону ідемпотентності для операції додавання за модулем 2. Такий закон існує лише для кон'юнкції та диз'юнкції $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$.



Алгебра Жегалкіна за операцією $\oplus$ є абелевою групою, де кожен елемент є зворотним до самого себе. Це означає, що завжди $x \oplus x = 0$.

Відповідь. Поліном Жегалкіна для функції знайдено неправильно.

Правильне розв'язання

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \bar{x} \wedge (x \vee y) = (x \oplus 1)(x \oplus y \oplus xy) = \\ &= xx \oplus xy \oplus xxy \oplus x \oplus y \oplus xy = \\ &= x \oplus xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus xy = \\ &= xy \oplus y \end{aligned}$$

Відповідь. $f(x, y) = xy \oplus y$.

Через прийом «навмисної помилки» викладач демонструє критичну важливість аналізу кожного кроку синтезу полінома, наголошуючи, що в цифровій логіці помилка в одному елементі чи нехтування властивістю $x \oplus x = 0$ робить усю систему непрацездатною.

Проведене нами опитування здобувачів спеціальності «Математика» після вивчення теми «Способи побудови поліномів Жегалкіна» показало наступне:

1. 72% студентів зазначили, що порівняння методів допомогло їм краще зрозуміти тему.

2. Найбільш «прозорим» для розуміння логіки був визнаний метод невизначених коефіцієнтів. Студенти оцінили доцільність цього методу залежно від кількості змінних n (при $n > 4$ система стає громіздкою). Найбільш ефективним – метод перетворень.

3. Анкетування підтвердило, що акцент на виборі методу (а не на простому заучуванні алгоритмів) підвищує рівень зацікавленості здобувачів у вивченні матеріалу.

Висновки.

1. Порівняльний аналіз методів (еквівалентних перетворень, невизначених коефіцієнтів та за ДДНФ булевої функції) довів, що кожен із них має різний когнітивний потенціал. Метод перетворень сприяє глибокому розумінню



логічних законів; метод невизначених коефіцієнтів актуалізує міжпредметні зв'язки з лінійною алгеброю, формуючи системне бачення математичних об'єктів; метод побудови за ДДНФ булевої функції розвиває навички алгоритмізації.

2. Формування критичного мислення здобувачів спеціальності «Е7 Математика» найбільш ефективно відбувається у ситуації вибору. Навчання не повинно обмежуватися репродукуванням одного алгоритму; натомість студенти мають самостійно оцінювати складність задачі та обирати найбільш раціональний метод синтезу.

3. Емпіричні дані (опитування та анкетування) підтвердили, що використання інтерактивних методів навчання підвищує рівень зацікавленості здобувачів у вивченні дискретної математики.

Перспективи подальших досліджень. Подальшого вивчення потребує питання інтеграції систем комп'ютерної математики у процес перевірки результатів синтезу поліномів. Це дозволить розширити можливості для самостійної роботи студентів та поглибити їхні навички в галузі комп'ютерної реалізації математичних моделей.

Список використаних джерел

1. Балога С.І Дискретна математика. Навчальний посібник. Ужгород: ПП «АУТДОРШАРК», 2021. 124 с.
2. Борисенко О. А. Дискретна математика. Суми: Університетська книга, 2023. 255с.
3. Гнатів Б.В., Гладун В.Р., Гнатів Л.Б. Дискретна математика. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2021. 400 с.
4. Матвієнко М. П. Дискретна математика. Київ: Ліра-К, 2019. 324 с.
5. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Львів: Магнолія, 2024. 432 с.
6. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М.,



Печурін М.К. Основи дискретної математики. К.: Наукова думка, 2002. 567 с.

7. Темнікова О.Л., Тавров Д.Ю. Дискретна математика. Частина 1. Практикум. Київ: Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 121с.

8. Друшляк М.Г., Лукашова Т.Д., Скасків Л.В. Навчання майбутніх вчителів математики розв'язувати задачі теорії графів із використанням Geogebra. Фізико-математична освіта. 2019. № 1(19). С. 35-40.

9. Жерновникова О.А. Використання методу проектів при вивченні елементарної математики студентами педагогічних ВНЗ. *Педагогіка та психологія*. 2012. № 42. С. 81-86.

10. Рудницький С.О., Колмакова В.О., Шаров С.В. Проектна діяльність у курсі дискретної математики з використанням інформаційних технологій. *Вісник науки та освіти*. 2024. №5(23). С.1386-1399.

11. Sharova T. M., Tykhonenko M. M. Digitalization of educational space: modern trends. *Українські студії в європейському контексті*. 2023. № 7. С. 414-420

12. Жданова Ю.Д., Шевченко С.М., Шевченко Г.В. Усвідомлення абстрактності через прикладну спрямованість дискретної математики. *Матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»* (29-30 грудня 2016 р., м. Київ). С. 147-149.

13. Медведєва М.О., Колмакова В.О. Дистанційне навчання дискретної математики засобами персонального освітнього web-ресурсу. *Інновації в освіті: здобутки та перспективи*. 2017. С. 94-100.

14. Duan Z., Wang J., Li F., Wang T. The Application of Information Technology in Discrete Mathematics Teaching. *International Conference on Education, Network and Information Technology (ICENIT 2022)*. 2022. pp. 79-82.

15. Швай О.Л. Практикум із дискретної математики. 2-ге вид., переробл. і допов. Луцьк: Вежа-Друк, 2025. 230 с.