



ПРОФЕСІЙНА ОСВІТА

УДК 517.91

DOI <https://doi.org/10.5281/zenodo.19650414>

**Про існування ізольованого періодичного розв'язку нелінійного
диференціального рівняння типу Лієнара**

Кириченко Віктор Вікторович

доцент кафедри комп'ютерних наук,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

v.kyrychenko@nubip.edu.ua

Національний університет біоресурсів і природокористування України,
Україна, 03041, м. Київ, вул. Героїв Оборони, 15

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-0575-8684>

Лесіна Євгенія Вікторівна

доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

eugenia.lesina.17@gmail.com

НТУУ «Київський політехнічний інститут імені І.Сікорського»,
Україна, 03056, м. Київ, просп. Берестейський, 37

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9803-6727>

Новікова Юлія Вікторівна

доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

yuliia.novikova.kpi@gmail.com

НТУУ «Київський політехнічний інститут імені І.Сікорського»,
Україна, 03056, м. Київ, просп. Берестейський, 37

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3530-0420>



Прийнято: 11.03.2026 | Опубліковано: 30.03.2026

Анотація: Рівняння Лієнара – диференціальне рівняння другого порядку, яке використовується при моделюванні автоколивальних систем, що підтримують стабільний ритм без зовнішнього втручання. Головна особливість полягає в тому, що за певних умов рівняння має єдиний стійкий граничний цикл. Це означає, що система завжди виходить на один і той самий ритм коливань, незалежно від початкових умов, тобто повертається до свого робочого ритму, навіть якщо її сильно "штовхнути". Це робить складні пристрої та живі організми передбачуваними та надійними. **Метою** роботи є отримання умов існування ізольованого періодичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку типу Лієнара, що є однією з актуальних проблем якісної теорії нелінійних диференціальних рівнянь. Досліджуване рівняння описує характер стаціонарних процесів, які мають вагомий вплив на структуру багатьох рухів в реальному житті. **Методи** доведення відносяться до прямих (аналітичних) методів, зокрема – заміна змінної, інтегрування, використання інтегральних перетворень. **Результати**, отримані в процесі вивчення властивостей узагальненого нелінійного диференціального рівняння типу Лієнара, описують виникнення нелінійних коливань. **Висновки:** сформульовано умови існування єдиного періодичного розв'язку, якому на фазовій картині відповідає стійкий граничний цикл.

Ключові слова: рівняння Лієнара, ізольований періодичний розв'язок, динамічна система, граничний цикл.



On the existence of an isolated periodic solution of a nonlinear differential equation of the Lienar type

Viktor Kyrychenko

Associate Professor, Department of Computer Sciences,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

v.kyrychenko@nubip.edu.ua

National University of Life Resources and Environmental Management of Ukraine,

Ukraine, 03041, Kyiv, Heroiv Oborony St., 15

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-0575-8684>

Yevheniia Lesina

Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Probability Theory,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

eugenia.lesina.17@gmail.com

NTUU "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",

Ukraine, 03056, Kyiv, Beresteyskyi Ave., 37

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9803-6727>

Yuliia Novikova

Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Probability Theory,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

yuliia.novikova.kpi@gmail.com

NTUU "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",

Ukraine, 03056, Kyiv, Beresteyskyi Ave., 37

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3530-0420>

Abstract: *The Lienar equation is a second-order differential equation used in modeling self-oscillating systems that maintain a stable rhythm without external intervention. The main feature is that under certain conditions the equation has a single stable limit cycle. This means that the system always reaches the same rhythm of oscillations, regardless of the initial conditions, that is, it returns to its working rhythm, even if it is strongly "pushed". This makes complex devices and living organisms predictable and reliable. The objective of the article is to obtain the conditions for the existence of an isolated periodic solution of a second-order nonlinear differential equation of the Lienar type, which is one of the current problems of the qualitative theory of nonlinear differential equations. The equation under study describes the nature of stationary processes that have a significant impact on the structure of many movements in real life. Research methods of proof are direct (analytical) methods, in particular – substitution of variables, integration, use of integral transformations. The results obtained in the process of studying the properties of a generalized nonlinear differential equation of the Lienar type describe the occurrence of nonlinear oscillations. Conclusions: the conditions for the existence of a single periodic solution, which corresponds to a stable limit cycle in the phase diagram, are formulated.*

Keywords: *Lienar equation, isolated periodic solution, dynamical system, limit cycle.*

Постановка проблеми і аналіз останніх публікацій. Рівняння Лієнара – диференціальне рівняння другого порядку, яке використовується при моделюванні автоколивальних систем, що підтримують стабільний ритм без зовнішнього втручання. Головна особливість полягає в тому, що за певних умов рівняння має єдиний стійкий граничний цикл. Це означає, що система завжди виходить на один і той самий ритм коливань, незалежно від початкових умов, тобто повертається до свого робочого ритму, навіть якщо її сильно "штовхнути". Це робить складні пристрої та живі організми передбачуваними та надійними.

Рівняння Лієнара всебічно вивчалось і вивчається з різних точок зору. Звичайний метод його дослідження – перехід до еквівалентної двовимірної автономної системи. На даний час є досить велика кількість публікацій [1–10], присвячених трьом ключовим напрямкам: якісному аналізу граничних циклів, перенесенню теорії на дробові похідні та розробці чисельно-аналітичних методів для прикладних задач. Зокрема, автори робіт [1–4] фокусуються на класичних математичних проблемах: існуванні, єдиності та кількості граничних циклів. Дробові рівняння Лієнара (Fractional Dynamics), властивості яких вивчаються в статтях [5–7], значно поширюють поняття класичного рівняння на випадок похідних дробового порядку. Здобутки робіт [8–10] пов’язані з розробкою алгоритмів пошуку точних розв’язків та моделювання складних коливань.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Основною метою даної роботи є дослідження узагальненого нелінійного диференціального рівняння типу Лієнара

$$(m(x) \cdot x')' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad (1)$$

і отримання умов існування його ізольованого періодичного розв’язку. У контексті нелінійної механіки таке рівняння описує широкий спектр процесів, де параметри системи залежать від її стану. Відповідна динамічна система для (1) досить повно вивчена в літературі [3, 4, 11], що дозволило одержати результати, які описують виникнення нелінійних коливань.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо докладніше рівняння (1), причому будемо вважати, що функція $m(x) > 0$ і неперервна, та отримаємо умови існування його розв’язку, керуючись відомими теоремами для рівняння Лієнара:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \quad (1_0)$$

Перехід від рівняння (1) до (1₀) є очевидним у випадку, коли $m(x)$ диференційована, проте ми знаходимось у припущенні, що ця функція лише

неперервна, тому здійснювати перехід від (1) до (1₀) будемо за допомогою заміни невідомої функції $x(t)$ новою функцією $z(t)$:

$$\dot{z}(x(t)) = m(x(t))\dot{x}(t). \quad (2)$$

Проінтегруємо обидві частини рівності (2) в межах від 0 до t :

$$\int_0^t z'(\tau) d\tau = \int_0^t m(x(\tau))x'(\tau) d\tau.$$

Враховуючи, що $x'(\tau)d\tau = dx$, матимемо:

$$z(x) = \int_0^x m(s) ds,$$

де покладемо $\int_0^x m(s) ds = M(x)$, тоді

$$z(x(t)) = M(x),$$

звідки

$$x = M^{-1}(z). \quad (3)$$

Підставимо співвідношення (3) в (1):

$$z'' + \frac{f(M^{-1}(z))}{m(M^{-1}(z))} z' + g(M^{-1}(z)) = 0.$$

Позначивши відповідно $\tilde{f}(z) = \frac{f(M^{-1}(z))}{m(M^{-1}(z))}$, $\tilde{g}(z) = g(M^{-1}(z))$, одержимо:

$$z'' + \tilde{f}(z) + \tilde{g}(z) = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) фактично є рівнянням Лієнара, еквівалентним системі

$$z' = y, \quad y' = -\tilde{g}(z) - \tilde{f}(z)y,$$

або

$$z' = -\tilde{F}(z) + v, \quad v' = -\tilde{g}(z),$$

де

$$\tilde{F}(z) = \int_0^z \tilde{f}(s) ds, \quad \tilde{G}(z) = \int_0^z \tilde{g}(s) ds.$$

Як відомо з [11], для рівняння Лієнара справджується теорема існування періодичного розв'язку, яка лишається справедливою для рівняння (4).

Теорема 1. *Рівняння (4) має єдиний періодичний розв'язок, якому на фазовій картині відповідає стійкий граничний цикл, якщо*

$$a) \tilde{f}(z) = \tilde{f}(-z), f(0) < 0;$$

$$b) \tilde{F}(z)(z-a) > 0 \text{ для } 0 < z < a \text{ та для } z > a, \text{ до того ж } \tilde{F}(z) \text{ монотонна для } z > a \text{ і } \tilde{F}(z) \rightarrow \infty \text{ при } z \rightarrow \infty;$$

$$c) \tilde{g}(z) = -\tilde{g}(-z).$$

Оскільки нас цікавлять умови існування періодичного розв'язку саме для рівняння (1), що звелось до рівняння (4), сформулюємо вимоги теореми 1 в термінах $m(x)$, $f(x)$ і $g(x)$, тобто для функцій рівняння (1).

Розглянемо умову

$$a) \tilde{f}(z) = \tilde{f}(-z), f(0) < 0.$$

У нас

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(M^{-1}(z))}{m(M^{-1}(z))} = \frac{f(x)}{m(x)}, \quad \tilde{f}(-z) = \frac{f(M^{-1}(-z))}{m(M^{-1}(-z))}.$$

Знайдемо загальний вигляд оператора $M^{-1}(z)$.

Інтегруючи рівність $\dot{z} = \dot{x}m(x) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\dot{z}}{m(x)}$ за змінною t ,

$$x(t) = \int \frac{\dot{z}(x(\tau))}{m(x(\tau))} d\tau = M^{-1}(z), \quad (5)$$

приходимо до загального вигляду (5) оператора $M^{-1}(z)$, зокрема $M^{-1}(0) = 0$.

Звідси

$$M^{-1}(-z) = \int_0^t \frac{-\dot{z}(x(\tau))}{m(x(\tau))} d\tau = -M^{-1}(z) = -x(t).$$

Як підсумок, $M^{-1}(-z) = -x \Rightarrow \tilde{f}(-z) = \frac{f(-x)}{m(-x)}.$

Отже, умова $a)$ теореми 1 перепишеться у вигляді:

$$\frac{f(x)}{m(x)} = \frac{f(-x)}{m(-x)}, \quad \frac{f(0)}{m(0)} < 0.$$

Розглянемо умову

b) $\tilde{F}(z)(z-a) > 0$ для $0 < z < a$ та для $z > a$, до того ж $\tilde{F}(z)$ монотонна для $z > a$ і $\tilde{F}(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$.

Маємо:

$$\tilde{F}(z) = \int_0^z \tilde{f}(s) ds = \int_0^z \frac{f(M^{-1}(s))}{m(M^{-1}(s))} ds.$$

$$z(x) = \int_0^z m(s) ds = M(x).$$

Зробимо заміну:

$$p = M^{-1}(s) \Rightarrow s = M(p),$$

$$ds = M'(p) dp.$$

Відомо, що $M(p) = \int_0^p m(s) ds$, тоді $M'(p) = m(p)$, $s = z$, $M(p) = z \Rightarrow p = M^{-1}(z) = x$, з чого

випливає:

$$\tilde{F}(z) = \int_0^x \frac{f(p)}{m(p)} m(p) dp = \int_0^x f(p) dp.$$

Позначимо $F(x) = \int_0^x f(p) dp$. Функції $\tilde{F}(z)$ і $F(x)$ є інваріантними відносно заміни змінних.

Умова b) виконується для $0 < z < a$, але, зробивши заміну змінних, отримуємо:

$$0 < M(x) < a.$$

Так як $M(x)$ – монотонно зростаюча функція, застосуємо обернену функцію:

$$0 < x < M^{-1}(a).$$

Нехай $M^{-1}(a) = a_1$, тоді

$$0 < x < a_1.$$

У такий спосіб, умова $b)$ теореми 1 для рівняння (1) переписується у вигляді:

$F(x)(x-a_1) > 0$ для $0 < x < a_1$ та для $x > a_1$, до того ж $F(x)$ монотонна для $x > a_1$ і $F(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, де $a_1 = M^{-1}(a)$.

Розглянемо умову

$$c) \tilde{g}(z) = -\tilde{g}(-z).$$

Оскільки $\tilde{g}(z) = g(M^{-1}(z)) = g(x)$, $\tilde{g}(-z) = g(M^{-1}(-z))$, а також з доведення умови $a)$ відомо, що $M^{-1}(-z) = -x$, то $\tilde{g}(-z) = g(-x)$.

Отже, дана умова переписується у вигляді:

$$g(x) = -g(-x).$$

Як результат, доведено наступну теорему існування періодичного розв'язку для рівняння (1):

Теорема 2. *Рівняння (1) має єдиний періодичний розв'язок, якому на фазовій картині відповідає стійкий граничний цикл, якщо*

$$a) \frac{f(x)}{m(x)} = \frac{f(-x)}{m(-x)}, \frac{f(0)}{m(0)} < 0;$$

$b) F(x)(x-a_1) > 0$ для $0 < x < a_1$ та для $x > a_1$, до того ж $F(x)$ монотонна для $x > a_1$ і $F(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$;

$$c) g(x) = -g(-x).$$

Висновки. Ідея роботи полягає у відтворенні з єдиної точки зору умов існування періодичних розв'язків рівнянь (1) і (1₀). Вибір рівнянь не є випадковим: вони постають як важливі математичні моделі, що описують різноманітні процеси нелінійної механіки. Сформульовано і доведено теорему існування ізолюваного періодичного розв'язку узагальненого нелінійного диференціального рівняння типу Лієнара, яке виникає в процесі моделювання автоколивальних систем, що підтримують стабільний ритм без зовнішнього втручання.



Список використаних джерел

1. Llibre J., Zhang X. On the number of limit cycles of the Lienar equation. *Exposiciones Matemáticas*. 2017. Vol. 35, No. 3. P. 286–300.
2. Singh J., Kumar J., et al. A reliable numerical algorithm for fractional Lienar equation arising in oscillating circuits. *AIMS Mathematics*. 2024. Vol. 9, No. 4. P. 9540–9558.
3. Sabatini M., Villadelprat J. C^∞ -Structures for Liénar Equations and New Exact Solutions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2025 (Early View/2024). DOI: 10.1002/mma.10498.
4. Gavrilov L., Iliev I. D. The limit cycles in a generalized Rayleigh–Lienar oscillator. *Journal of Differential Equations*. 2022. Vol. 314. P. 533–554.
5. Zhao J., Li J., Wu K. Limit cycles for a cubic generalized Lienar system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2024. DOI: 10.3934/dcdsb.2025045.
6. Alchikh R., Khuri S. Numerical simulation of the fractional Lienar equation. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. 2019. Vol. 30, No. 3. P. 1223–1238.
7. Fleitas A., Nápoles Valdés J. E., et al. On fractional Lienar-type systems. *Revista Mexicana de Física*. 2019. Vol. 65, No. 6. P. 618–625.
8. Jose S. A., et al. Qualitative behavior of solutions of Lienar-type systems with state-dependent impulses. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2022. Vol. 67. Art. 103621.
9. Nápoles Valdés J. E. A Note on the Oscillatory Nature of Lienar Equation. *Asian Research Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 20, No. 5. P. 12–24.
10. Zhang J. Dynamics of polynomial generalized Lienar system near the origin and infinity. *arXiv preprint*. 2024. arXiv:2405.18438.
11. Reissig R., Sansone G., Conti R. *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen*. / Verlag: Edizioni Cremonese, Roma, 1963.