ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ:
НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТЕОРІЯ І ПРАКТИКА НАВЧАННЯ

УДК 519.1:510.63

DOI https://doi.org/10.5281/zenodo.20438277

Критерії вибору раціональних форм подання логічних функцій у прикладних задачах дискретної математики

Швай Ольга Леонідівна,

кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу та статистики Волинського національного університету імені Лесі Українки, 43025, м. Луцьк, проспект Волі 13, Україна,

https://orcid.org/:0000-0001-9457-7297

Прийнято: 04.05.2026 | Опубліковано: 29.05.2026

Анотація. *У статті обґрунтовано, що оволодіння критеріями вибору раціональних форм подання логічних функцій є базовою компетентністю, що дозволяє майбутнім фахівцям не лише розуміти теоретичні засади функціонування обчислювальних систем, а й оптимізувати прикладні розробки в умовах реальних технічних обмежень.* ***Метою*** *дослідження є обґрунтування методичної доцільності використання задач із комбінаторним та прикладним змістом у процесі вивчення методів побудови нормальних форм таблично заданих логічних функцій для розвитку критичного мислення здобувачів. Для досягнення мети використано такі* ***методи****: аналіз наукової літератури, узагальнення педагогічного досвіду роботи у ЗВО, опитування та анкетування. Апробація запропонованих прийомів здійснювалася в межах педагогічного експерименту на факультеті* *інформаційних технологій і математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.*

Основні результати. *У роботі обґрунтовано, що відсутність єдиного способу представлення булевої функції у вигляді довільної ДНФ чи КНФ суттєво ускладнює перевірку логічної еквівалентності виразів. Це зумовлює необхідність переходу до канонічних форм (ДДНФ та ДКНФ), які гарантують єдиність подання для кожної конкретної функції. Доведено: попри наявність чітко розроблених алгоритмів побудови, ключовим аспектом навчання майбутніх фахівців має стати розвиток здатності свідомо обирати ту канонічну форму, яку доцільно синтезувати в конкретному випадку. Аналіз структури таблиці істинності на попередньому етапі забезпечує оптимізацію процесу ще до фази розрахунків, сприяючи переходу від механічного відтворення алгоритмів до свідомої аналітичної оцінки обчислювальної доцільності обраного методу. Автором встановлено, що використання задач із комбінаторним та прикладним змістом сприяє трансформації формальних знань у дієвий інструмент аналізу.*

Висновки. *Використання задач із комбінаторним та прикладним змістом у процесі вивчення методів побудови нормальних форм таблично заданих логічних функцій підвищує мотивацію майбутніх математиків до навчання та формує у них навички критичного мислення.*

Ключові слова: *булеві функції, ДДНФ та ДКНФ булевої функції, методи побудови нормальних форм, критичне мислення, майбутні математики.*

ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ:
НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Selection Criteria for Rational Forms of Representing Logical Functions in Applied Problems of Discrete Mathematics

Olha Shvai,
Candidate of Pedagogical Sciences, Docent, Docent of the Department of Mathematical Analysis and Statistics at the Faculty of Information Technologies and Mathematics of the Lesya Ukrainka Volyn National University,
43025, Lutsk, Voli Avenue 13, Ukraine,
https://orcid.org/0000-0001-9457-7297

Abstract. *The article substantiates that mastering the criteria for selecting rational forms of representing logical functions is a core competency. It enables future specialists not only to understand the theoretical foundations of computing systems but also to optimize applied developments under real technical constraints. The research aims to justify the methodical expediency of using problems with combinatorial and applied content in the process of studying methods for constructing normal forms of truth-table-defined logical functions to develop students' critical thinking. To achieve this goal, the following methods were used: analysis of scientific literature, generalization of pedagogical experience in higher education institutions, surveys, and questionnaires. The proposed techniques were tested during a pedagogical experiment at the Faculty of Information Technology and Mathematics of Lesya Ukrainka Volyn National University.*

Key results. *The study substantiates that the absence of a unique way to represent a Boolean function as an arbitrary DNF (Disjunctive Normal Form) or CNF (Conjunctive Normal Form) significantly complicates the verification of logical equivalence. This necessitates the transition to canonical forms (PDNF and PCNF), which guarantee a unique representation for each specific function. It is proved that, despite the existence of well-defined construction algorithms, a key* *aspect of training future specialists should be the development of the ability to consciously choose the canonical form that is appropriate to synthesize in a specific case. Preliminary analysis of the truth table structure ensures process optimization before the calculation phase, promoting a transition from mechanical reproduction of algorithms to a conscious analytical assessment of the computational expediency of the chosen method. The authors established that using problems with combinatorial and applied content facilitates the transformation of formal knowledge into an effective analytical tool.*

Conclusions. *The use of problems with combinatorial and applied content in the study of methods for constructing normal forms of truth-table-defined logical functions increases the motivation of future mathematicians and develops their critical thinking skills.*

Keywords: *Boolean functions, PDNF and PCNF of a Boolean function, methods for constructing normal forms, critical thinking, future mathematicians.*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими чи практичними завданнями (Вступ). На сучасному етапі розвитку інформаційних технологій проектування цифрових систем управління, засобів криптографічного захисту інформації та інтелектуальних систем аналізу даних базується на апараті булевої алгебри. Ефективність синтезу таких систем безпосередньо залежить від етапу переходу від табличної специфікації до аналітичної форми. Проблема полягає у відсутності універсального алгоритму, який би автоматично визначав оптимальну форму подання для будь-якої прикладної задачі, що зумовлює необхідність розробки чітких критеріїв раціональності.

Це зумовлює необхідність особливої уваги до вивчення відповідного матеріалу у межах освітньої компоненти «Дискретна математика», яка відіграє стратегічну роль у професійній підготовці здобувачів вищої освіти галузі знань «E Природничі науки, математика та статистика» (спеціальність «E7 Математика»). Оволодіння критеріями вибору раціональних форм подання логічних функцій є базовою компетентністю, що дозволяє майбутнім фахівцям не лише розуміти теоретичні засади функціонування обчислювальних систем, а й оптимізувати прикладні розробки в умовах реальних технічних обмежень. Особливої ваги при цьому набуває розвиток критичного мислення здобувачів, що виявляється у здатності свідомо обирати раціональну стратегію розв'язання задачі на основі попереднього аналізу вхідних даних.

Аналіз останніх досліджень і публікацій (Огляд літератури). Незважаючи на ґрунтовну теоретичну базу методів представлення логічних функцій, сучасна парадигма математичної освіти вимагає зміщення акцентів від механічного застосування алгоритмів до глибокого порівняльного аналізу їхньої обчислювальної ефективності.

Проблема вдосконалення методики викладання дискретної математики в закладах вищої освіти перебуває у центрі уваги багатьох українських науковців, які розглядають цю дисципліну як фундаментальну базу для розвитку логічного та алгоритмічного мислення здобувачів.

Теоретико-методологічні основи структурування змісту курсів дискретної математики висвітлені у працях таких науковців, як Ю. Бардачов, О. Борисенко, С. Балога, Б. Гнатів, Л. Гнатів, В. Гладун, М. Матвієнко, Ю. Нікольський, В. Пасічник, Ю. Щербина, Ю. Капітонова, С. Кривий, О. Летичевський, Г. Луцький, М. Печурін, А.Олійник та ін. Їхні дослідження спрямовані на створення цілісної системи викладу складних абстрактних концепцій у межах університетських програм [1–8].

Важливим напрямом є інтеграція інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в освітній процес, що набуває особливої актуальності при опануванні абстрактних концепцій дискретної математики. Зокрема, М. Друшляк, Т. Лукашова та Л. Скасків обґрунтовують ефективність використання середовища *GeoGebra* для візуалізації складних структур. У контексті дискретної математики це дозволяє наочно моделювати об'єкти теорії графів, будувати логічні схеми та ілюструвати комбінаторні конфігурації [9].

Дослідження С. Рудницького, В. Колмакової, С. Шарова та О. Жерновникова підтверджують суттєві переваги інтерактивних технологій та проєктної діяльності у вищій школі. Впровадження цих інструментів дозволяє трансформувати складні теоретичні аспекти дискретної математики у динамічний дослідницький процес, що значно підвищує рівень засвоєння матеріалу та стимулює пізнавальний інтерес студентів [10, 11, 12].

Окрему увагу в умовах цифровізації приділено розробці персональних освітніх ресурсів. Питання їх створення саме для дистанційного вивчення дискретної математики розглядаються у працях М. Медведєвої та В. Колмакової. Такі ресурси дозволяють адаптувати складний контент до індивідуальних потреб здобувачів, забезпечуючи гнучкість навчальної траєкторії [14].

Доповнює цю концепцію зарубіжний досвід (Z. Duan, J. Wang, F. Li, T. Wang), який акцентує на можливостях онлайн-тестування з адаптивним зворотним зв’язком. Такий підхід дозволяє надавати студентам персоналізовані рекомендації безпосередньо під час контролю знань, перетворюючи тестування з інструменту оцінювання на дієвий засіб коригування помилок у розв’язанні задач дискретної математики [15].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Аналіз зазначених праць свідчить про значний інтерес до цифровізації навчання дискретної математики та розширення інструментарію візуалізації абстрактних структур. Проте, попри високий ступінь розробки загальних методик, питання формування у здобувачів системи критеріїв для вибору

ISSN: 2786-9458

раціональних форм подання логічних функцій (зокрема порівняльного аналізу ДНФ, КНФ та поліноміальних форм у прикладних задачах) висвітлено фрагментарно. Більшість існуючих підходів зосереджені на алгоритмізації побудови окремих форм, тоді як когнітивний аспект – свідомий вибір оптимальної стратегії подання залежно від технічних обмежень чи специфіки предметної області – потребує подальшого наукового та методичного обґрунтування.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Мета дослідження полягає у обґрунтуванні методичної доцільності використання задач із комбінаторним та прикладним змістом у процесі вивчення методів побудови нормальних форм таблично заданих логічних функцій для розвитку критичного мислення здобувачів.

Методи дослідження. Використано аналіз наукової літератури, узагальнення власного педагогічного досвіду у ЗВО, а також опитування й анкетування здобувачів для оцінки рівня сформованості аналітичних навичок. Апробація здійснювалася в умовах освітнього процесу факультету інформаційних технологій і математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням здобутих наукових результатів (Результати дослідження).

Спеціальними формами зображення булевих функцій в алгебрі Буля є диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ) та кон'юнктивні нормальні форми (КНФ). Будь-яку формулу булевої алгебри можна звести до еквівалентної їй ДНФ чи КНФ, проте таке представлення не є єдиним. Відсутність єдиності представлення булевої функції у формі довільної ДНФ чи КНФ призводить до суттєвого ускладнення процедури перевірки логічної еквівалентності виразів. З інженерної точки зору це є неефективним, оскільки використання немінімізованих форм спричиняє надмірні витрати апаратних ресурсів,

ISSN: 2786-9458

збільшує енергоспоживання цифрових пристроїв та сповільнює роботу алгоритмів автоматизованого проектування.

Саме тому виникає потреба в переході до канонічних форм – досконалих ДНФ та КНФ, які гарантують єдиність представлення для кожної конкретної функції [16].

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) називається ДНФ, у якої кожна елементарна кон'юнкція є конституентою одиниці.

Теорема. Довільна булева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ може бути єдиним способом зображена в ДДНФ.

Алгоритм побудови ДДНФ для функції, яка задана таблично:

1. Для кожного набору, на якому дана функція приймає значення 1, будують відповідну цьому набору конституенту одиниці.

2. Знаходять диз'юнкцію всіх цих конституент. Це і є ДДНФ заданої функції.

Теорема. Довільна булева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 1$ може бути зображена в ДКНФ єдиним способом.

Алгоритм побудови ДКНФ для функції, яка задана таблично:

1. Для кожного набору, на якому функція приймає значення 0, будують відповідну цьому набору конституенту нуля.

2. Знаходять кон'юнкцію всіх цих конституент. Це і є ДКНФ заданої функції.

Наведені теореми та алгоритми складають формальну основу вивчення нормальних форм. Однак у межах сучасної освітньої парадигми важливо змістити фокус із репродуктивного відтворення цих кроків алгоритмів на розвиток здатності до попередньої аналітичної рефлексії [17].

Для формування критичного мислення здобувачів освіти важливо, щоб вони самостійно прийшли до висновку про обчислювальну доцільність вибору

https://pedagogical-academy.com/index.php/journal/about ISSN: 2786-9458

конкретної канонічної форми. Аналіз структури таблиці істинності дозволяє оптимізувати процес синтезу логічного виразу ще до початку розрахунків.

Зокрема, для розвитку аналітичних навичок здобувачів варто акцентувати увагу на закономірностях вибору форми подання:

1. У випадку, коли кількість одиниць у векторі значень функції є меншою за кількість нулів, побудова ДДНФ є раціональнішою. Це дозволяє отримати вираз із мінімальною кількістю конституент, що суттєво спрощує подальші аналітичні перетворення та знижує ризик помилок при ручних розрахунках.

2. Якщо кількість одиниць переважає кількість нулів, то методично виправданим є перехід до ДКНФ. Такий підхід дозволяє мінімізувати кількість логічних операцій у фінальній формулі, що з інженерної точки зору прямо корелює зі зменшенням складності та вартості реалізації логічної схеми.

3. Коли кількість нулів та одиниць у таблиці істинності є однаковою, вибір між ДДНФ та ДКНФ стає обчислювально рівноцінним. У такому разі здобувач має самостійно визначити форму подання, виходячи з контексту завдання.

Для переходу від механічного виконання алгоритмів до свідомого вибору стратегії розв’язання, доцільно пропонувати здобувачам систему завдань, що базуються на елементах прогнозування та комбінаторного аналізу.

Завдання 1. Побудувати ДДНФ та ДКНФ для функції, що містить лише один нуль у таблиці істинності.

Методична мета: Наочне зіставлення громіздкої ДДНФ, що містить (2^n - 1) конституент, із компактною ДКНФ, яка складається лише з однієї конституенти. Це демонструє, як попередній аналіз вектора значень дозволяє уникнути надмірних обчислювальних витрат.

Завдання 2. Побудувати канонічну форму (ДДНФ або ДКНФ на вибір студента) для булевих функцій від *n* (*n*=4) змінних, заданих вербально:

 ISSN: 2786-9458

а) Функція f_1 набуває значення «1» на всіх тих і тільки тих наборах, до яких входить не менше ніж два нулі;

б) Функція f_2 набуває значення «1» на всіх тих і тільки тих наборах, до яких входить не менше ніж дві одиниці.

Методична мета: При розв'язанні цих задач здобувачі мають застосувати апарат комбінаторики (формули сполук) для попереднього визначення кількості нулів і одиниць, які набуває функція. Наприклад, для пункту б) кількість одиниць обчислюється як сума способів обрати 2, 3 або 4 позиції для одиниць серед чотирьох змінних: $C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 6 + 4 + 1 = 11$. Відповідно кількість нулів $2^4 - 11 = 5$. Здобувач, провівши такі комбінаторні обчислення, має зробити самостійний висновок, що для функції f_2 побудова ДКНФ є значно ефективнішою, оскільки вона міститиме лише 5 конституент проти 11 у ДДНФ.

Наступним логічним кроком у методиці викладання є впровадження задач практичного змісту. У таких задачах булеві змінні перестають бути абстракціями, перетворюючись на сигнали реальних датчиків, а вибір канонічної форми стає стратегічним рішенням. Оптимізація виразу тут означає не просто «коротший запис», а зменшення кількості фізичних логічних елементів, підвищення надійності системи та зниження її вартості.

Розглянемо приклад практичного кейса *Проектування логічного контролера системи пожежогасіння:*

У серверному приміщенні встановлено три датчики температури *x, y, z*. Сигнал з датчиків надходить на логічний контролер *f(x,y,z)*, який керує роботою центральної системи розпилення газу. Логічні змінні *x, y, z* набувають значення 1, якщо фіксують нормальну температуру, 0 – критичну. Записати формулу булевої функції, яка керує системою гасіння пожежі (*f(x,y,z)=1,* якщо система активізована, 0 – у протилежному випадку) у двох різних режимах:

ISSN: 2786-9458

а). Режим 1 *(захист від хибних спрацювань)*: Система активується лише при виході з ладу принаймі двох будь-яких датчиків. Якщо спрацював лише один датчик – це вважається технічною помилкою.

б). Режим 2 *(швидке реагування)*: Система активується, якщо сигнал про небезпеку надійшов хоча б від одного датчика.

Методичні вказівки. Здобувачі повинні спочатку чітко визначити фізичний зміст значень змінних. Система пожежогасіння має активізуватися ($f=1$), коли датчики сигналізують проблему ($x=0, y=0, z=0$).

Для кожного режиму необхідно визначити кількість комбінацій вхідних сигналів, що призводять до спрацювання системи.

Для випадку а) це зручно зробити за допомогою побудови таблиці істинності функції $f(x,y,z)$, відповідно до умови задачі (*Таблиця 1*). Далі, оцінивши доцільність вибору конкретної канонічної форми, здійснити вибір і скласти ДДНФ чи ДКНФ.

Таблиця 1

Таблиця істинності функції $f(x,y,z)$

x	***y***	***z***	***f(x,y,z)***
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Функція f приймає значення 1 на наборах 000, 001,010 та 100. Тому, будують відповідні цим наборам конституенти одиниці. Диз’юнкція цих конституент і є ДДНФ заданої функції $f = = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$.

 ISSN: 2786-9458

Для випадку б) побудова таблиці істинності не є раціональною. Аналіз умови показує, що система не активується (f =0) лише в одному випадку: коли всі три датчики показують норму ($x=1, y=1, z=1$). У всіх інших випадках, а їх 8 - 1 = 7, система має спрацювати (f =1). Отже, функція f приймає значення 0 на одному лише наборі (1, 1, 1). Тому, вигідніше побудувати ДКНФ. Будуємо відповідну цьому набору конституенту нуля. Це і є ДКНФ заданої функції $f = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.

Впровадження таких прикладних кейсів у викладання ОК «Дискретна математика» дозволяє розв'язати ключову проблему відірваності теоретичних знань здобувачів від майбутньої професійної діяльності.

Робота над практичними кейсами, аналогічними до проектування логічних контролерів, забезпечує досягнення декількох рівнів навчання:

1. Концептуальний рівень. Здобувачі починають сприймати булеві змінні не як абстрактні символи, а як сигнали реальних фізичних об'єктів (датчиків, реле, вимикачів). Це закладає основу для розуміння архітектури комп'ютерних систем.

2. Аналітико-прогностичний рівень. Вибір між ДДНФ та ДКНФ у практичних задачах перестає бути формальною вправою. Здобувачі усвідомлюють, що кожна «зайва» конституента в обраній формі – це додаткові витрати ресурсів, складніша схема та потенційне зниження надійності системи.

3. Розвиток критичної рефлексії. Практичний контекст змушує здобувачів перевіряти отриманий результат. Наприклад, якщо отримана формула вимагає складної обробки багатьох сигналів, здобувач має самостійно ініціювати пошук більш лаконічного рішення.

Під час викладання освітньої компоненти «Дискретна математика» у Волинському національному університеті імені Лесі Українки для здобувачів спеціальності «Математика» було впроваджено низку проблемно-пошукових

 ISSN: 2786-9458

кейсів, що передбачають варіативність вибору канонічних форм. Проведене нами опитування здобувачів після опрацювання теми «Булеві функції» засвідчило високу ефективність запропонованого підходу: 90% респондентів підкреслили, що аналіз практико-орієнтованих завдань сприяв глибшому розумінню теоретичного матеріалу та допоміг усвідомити прикладну цінність абстрактних логічних структур.

Висновок. Використання задач із комбінаторним та прикладним змістом у процесі вивчення методів побудови нормальних форм таблично заданих логічних функцій сприяє трансформації формальних знань у дієвий інструмент. Залучення методів комбінаторного аналізу вхідних даних на етапі вибору форми подання не лише підвищує мотивацію до навчання, а й формує у здобувачів навички критичного мислення. Це виявляється у здатності свідомо оцінювати складність реалізації та обирати найефективніший шлях розв’язання задачі з урахуванням заданих технічних обмежень.

Перспективи подальших досліджень. Подальші розвідки у цьому напрямі мають бути зосереджені на розробці методичних аспектів вивчення методів мінімізації як логічного продовження теми побудови канонічних форм у контексті автоматизованого проектування.

Список використаних джерел

1. Балога С.І Дискретна математика. Навчальний посібник. Ужгород: ПП «АУТДОР-Шарк», 2021. 124 с.
2. Борисенко О. А. Дискретна математика. Суми: Університетська книга, 2025. 255с.
3. Гнатів Б.В., Гладун В.Р., Гнатів Л.Б. Дискретна математика. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2021. 400 с.
4. Матвієнко М. П. Дискретна математика. Київ: Ліра-К, 2019. 324 с.
5. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна

ISSN: 2786-9458

математика. Львів: Магнолія, 2024. 432 с.

6. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. К.: Наукова думка, 2002. 567 с.

7. Темнікова О.Л., Тавров Д.Ю. Дискретна математика. Частина1. Практикум. Київ: Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 121с.

8. Друшляк М.Г., Лукашова Т.Д., Скасків Л.В. Навчання майбутніх вчителів математики розв'язувати задачі теорії графів із використанням Geogebra. Фізико- математична освіта. 2019. № 1(19). С. 35-40.

9. Жерновникова О.А. Використання методу проектів при вивченні елементарної математики студентами педагогічних ВНЗ. *Педагогіка та психологія*. 2012. No 42. С. 81-86.

10. Олійник А.С., Петравчук А.П. Дискретна математика. Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. К, 2024. 177 с.

11. Рудницький С.О., Колмакова В.О., Шаров С.В. Проектна діяльність у курсі дискретної математики з використанням інформаційних технологій. *Вісник науки та освіти.* 2024. №5(23). С.1386-1399.

12. Sharova T. M., Tykhonenko M. M. Digitalization of educational space: modern trends. *Українські студії в європейському контексті*. 2023. № 7. С. 414-420.

13. Жданова Ю.Д., Шевченко С.М., Шевченко Г.В. Усвідомлення абстрактності через прикладну спрямованість дискретної математики. *Матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»* (29-30 грудня 2016 р., м. Київ). С. 147-149.

14. Медведєва М.О., Колмакова В.О. Дистанційне навчання дискретної математики засобами персонального освітнього web-ресурсу. *Інновації в освіті: здобутки та перспективи*. 2017. С. 94-100.

 ISSN: 2786-9458

15. Duan Z., Wang J., Li F., Wang T. The Application of Information Technology in Discrete Mathematics Teaching. *International Conference on Education, Network and Information Technology (ICENIT 2022).* 2022. pp. 79-82.

16. Швай О.Л. Практикум із дискретної математики. 2-ге вид., переробл. і допов. Луцьк: Вежа-Друк, 2025. 230 с.

17. Швай О.Л. 2026. Порівняльна характеристика методів синтезу канонічних форм алгебри Жегалкіна. *Педагогічна Академія: наукові записки.* 2026. №27. DOI:https://doi.org/10.5281/zenodo.18827236