



ТЕОРІЯ І МЕТОДИКА ПРОФЕСІЙНОЇ ОСВІТИ

УДК 378.147:519.87

DOI <https://doi.org/10.5281/zenodo.20845182>

**Методичні засади викладання дисципліни
«Математичне моделювання позитивних систем»
у підготовці магістрів спеціальності «Прикладна математика»**

Леонтєва Вікторія Володимирівна

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики,
Запорізький національний університет,
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
доцент кафедри вищої математики і фізики,
Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного,
вул. Університетська, 66, 69011, Запоріжжя, Україна
e-mail: vleonteva@np.znu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-9863-9712>

Кондрат'єва Наталія Олександрівна

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики,
Запорізький національний університет,
вул. Університетська, 66, 69011, Запоріжжя, Україна
e-mail: nkondr@np.znu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-6994-2536>

Прийнято: 15.04.2026 | Опубліковано: 30.04.2026

Анотація.

Мета. Статтю присвячено розробці та теоретичному обґрунтуванню цілісних методичних засад викладання дисципліни «Математичне моделювання позитивних систем» для магістрів спеціальності «Прикладна математика». Увагу зосереджено на проектуванні науково-обґрунтованого дидактичного каркасу, що забезпечує не лише трансляцію теоретичного апарату теорії позитивних систем, а й формування у студентів здатності самостійно виявляти алгебраїчну структуру в конкретних явищах та переносити її між різними предметними контекстами, що є ключовою дослідницькою компетентністю магістерського рівня.

Методи. Дослідження ґрунтується на поєднанні двох методологічних площин: аналізу математичної структури предметної галузі та педагогічного проектування навчального процесу. У математичному вимірі здійснено аналіз теорії позитивних лінійних систем – матриць Метцлера, невід'ємних матриць, теореми Перрона-Фробеніуса, М-матриць та їх прикладних реалізацій у компартментних епідемічних моделях, моделі міжгалузевого балансу Леонтьєва та популяційних моделях. Педагогічний компонент спирається на принципи активного навчання та проблемно-базованого навчання, а також на компетентнісний підхід, закріплений стандартом вищої освіти зі спеціальності 113 «Прикладна математика».

Результати. Запропоновано трифазову методичну архітектуру курсу: «Математичні основи», «Побудова моделей», «Прикладний аналіз». Обґрунтовано трирівневий компетентнісний профіль: математична, модельна та дослідницька компетентності з відповідними критеріями оцінювання. Пілотна апробація запропонованої методики у межах магістерської програми засвідчила зростання середнього балу за критерієм «концептуальна глибина аналізу»; 73% студентів самостійно сформулювали нетривіальну



міждисциплінарну аналогію між компартментними та економічними моделями.

Висновки. Ефективна методика викладання теорії позитивних систем будується не навколо репродукції теорем, а навколо формування здатності студентів виявляти структурну єдність класу позитивних динамічних систем попри різноманіття їх предметних інтерпретацій. Спіральна архітектура курсу, у якій кожен ключовий математичний об'єкт з'являється у кількох прикладних контекстах, забезпечує міцну концептуальну мережу знань та є необхідною умовою формування дослідницьких компетентностей другого рівня вищої освіти.

Ключові слова: позитивні системи, матриця Метцлера, теорема Перрона-Фробеніуса, математичне моделювання, методика викладання, компетентнісний підхід, прикладна математика, магістерська підготовка.

**Methodological foundations for teaching the discipline
«Mathematical modelling of positive systems»
in the master's programme in applied mathematics**

Viktoriia Leontieva

Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate professor,
Associate professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics,
Zaporizhzhia National University,

Universytetska str., 66, 69011, Zaporizhzhia, Ukraine

Associate professor of the Department of Higher Mathematics and Physics,
Dmytro Motornyi Tavria State Agrotechnological University,
Universytetska str., 66, 69011, Zaporizhzhia, Ukraine

e-mail: vleonteva@np.znu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-9863-9712>



Nataliia Kondratieva

Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate professor,
Associate professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics,
Zaporizhzhia National University,
Universytetska str., 66, 69011, Zaporizhzhia, Ukraine

e-mail: nkondr@np.znu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-6994-2536>

Abstract.

Objective. The paper addresses the development and theoretical substantiation of an integrated methodological framework for teaching the discipline «Mathematical Modelling of Positive Systems» to master's-level students enrolled in the Applied Mathematics programme. The focus is on design a pedagogically grounded didactic structure that transcends the mere transmission of the formal apparatus of positive systems theory and instead cultivates in students the capacity to independently identify algebraic structure in concrete phenomena and transfer it across diverse disciplinary contexts, that is the main research competency at the master's level of higher education.

Methods. The investigation rests on a two-level methodological synthesis. The first level comprises a systematic analysis of the mathematical structure of positive linear systems theory, encompassing Metzler matrices, nonnegative matrices, the Perron-Frobenius theorem, and M -matrices, alongside their principal applied instantiations in compartmental epidemic models, Leontief's inter-industry balance model, and population dynamics. The second level concerns pedagogical design drawing on active learning principles, problem-based learning, and the competency-based framework stipulated by the national higher education standard for speciality 113 «Applied Mathematics».



Results. A three-phase course architecture is proposed: «Mathematical Foundations», «Model Construction», «Applied Analysis». A three-tier competency profile is substantiated: mathematical, modelling, and research competencies, each furnished with explicit assessment criteria. Pilot implementation within a master's programme demonstrated an increase in the mean score for the criterion «conceptual depth of analysis»; 73% of students independently formulated a non-trivial interdisciplinary analogy between compartmental epidemic and economic equilibrium models.

Conclusions. An effective methodology for teaching positive systems theory is organised not around the reproduction of theorems but around cultivating students' ability to perceive the structural unity of the class of positive dynamical systems across the diversity of their disciplinary interpretations. The spiral architecture of the course, whereby each key mathematical object recurs in multiple applied contexts, ensures a robust conceptual knowledge network and constitutes a necessary condition for the formation of research competencies at the second cycle of higher education.

Keywords: positive systems, Metzler matrix, Perron-Frobenius theorem, mathematical modelling, teaching methodology, competency-based approach, applied mathematics, master's education.

Постановка проблеми. Проблема відповідності між математичною строгістю навчального курсу та його прикладною релевантністю набуває особливої гостроти у тих дисциплінах, де предмет дослідження є одночасно і теоретичним конструктом, і безпосередньою мовою опису природних, технічних та соціально-економічних процесів. Дисципліна «Математичне моделювання позитивних систем» належить саме до зазначеної категорії: клас динамічних систем з невід'ємним станом не є спеціалізованим виключенням у загальній теорії, а становить власний структурний світ, де

властивості невід'ємності визначають як алгебраїчну форму системи, так і якісний характер її траєкторій. Саме тому грамотно побудована методика викладання даної дисципліни є не педагогічним додатком до наявної теорії, а самостійним науково-методичним завданням. Конкретний контекст постановки проблеми визначається освітньо-професійною програмою «Прикладна математика» другого (магістерського) рівня вищої освіти. Студенти, що формують цільову аудиторію курсу, вже мають розвинений апарат лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь та елементів теорії систем; проте стандартні програми не передбачають систематичного знайомства з поняттями матриці Метцлера, невід'ємної матриці у розумінні Перрона-Фробеніуса або структурними наслідками позитивності для стійкості. Відтак, дисципліна опиняється у методично складному просторі: вона повинна надбудовуватися над вже сформованим математичним апаратом, не повторюючи пройденого, та водночас виявляти в ньому нові змістові шари, що задаються структурою невід'ємності. Додаткова складність полягає у тому, що прикладні контексти позитивних систем є принципово міждисциплінарними: математична епідеміологія, економічне моделювання за Леонтьєвим, фармакокінетика, теорія мереж та популяційна екологія використовують спільний математичний апарат, але говорять різними предметними мовами. Методика курсу має задовольнити вимогу єдності теоретичного викладу при збереженні різноманіття прикладних контекстів, що можливо лише через побудову чітко структурованого дидактичного каркасу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження у сфері теорії позитивних систем протягом останніх років розвивалися у двох взаємопов'язаних напрямках. У першому (алгебраїчно-аналітичному) напрямі ключовою є робота [1], у якій встановлено необхідні та достатні умови стійкості матриць Метцлера через графову структуру взаємозв'язків між



компонентами системи та теорему про мале підсилення, що дозволяє інтерпретувати стійкість не лише спектрально, а й топологічно. У цьому ж напрямі в роботах [2-5] розроблено апарат лінійних матричних нерівностей для синтезу регуляторів, спостерігачів та фільтрів виявлення відмов для систем з матрицями Метцлера, зокрема для класу «остенсибельно метцлерівських» систем, де структура невід'ємності присутня лише потенційно та потребує додаткового конструктивного забезпечення [5]. Сукупно ці результати формують сучасний аналітичний фундамент для магістерського курсу, але залишаються суто математичними та не містять педагогічних настанов. Другий напрям (прикладне компартментне моделювання) суттєво активізувався у зв'язку з пандемією COVID-19. В роботі [6] запропоновано повний обчислювальний інструментарій аналізу компартментної SAIRP-моделі на основі Python та SageMath, включаючи обчислення базового репродуктивного числа методом матриці наступного покоління та чисельним калібруванням параметрів. В роботі [7] розширено підхід до моделей з поведінковими факторами та оптимальним керуванням у класі SVIR, зберігаючи позитивність стану та досліджуючи стійкість рівноваги без захворювання. Зазначені роботи є природним прикладним матеріалом другої та третьої фаз запропонованого курсу, однак залишають поза увагою питання методики, за якою студент самостійно будує подібні моделі у нових предметних контекстах. Педагогічний вимір математичного моделювання у вищій освіті проаналізований в огляді [8], що фіксує домінування аналітичного підходу до концептуалізації компетентностей моделювання та дефіцит стандартизованих інструментів їх оцінки на університетському рівні. В роботі [9] емпірично підтверджено перевагу незалежно-орієнтованої підтримки над директивною при роботі з математичними симуляціями у середовищі цифрових інструментів, а в роботі [10] показано, що методо-інтегративний стиль викладання забезпечує вищу

стійкість набутих компетентностей моделювання у студентів технічних спеціальностей порівняно з директивним [11]. Зазначені дослідження підтверджують доцільність проблемно-орієнтованої організації навчання, проте стосуються загальних принципів та не враховують специфіку предметної галузі позитивних систем.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Попри теоретичну зрілість математичного апарату позитивних систем, методичний вимір даної дисципліни залишається практично нерозробленим. Наявні навчальні матеріали здебільшого або є розширеними розділами монографій (зорієнтованих на дослідників, а не на студентів), або зводяться до набору ізольованих прикладів без експліцитного виявлення структурної єдності між ними. При цьому центральна методична проблема – як провести студента від конкретного невід’ємного явища до загального алгебраїчного поняття та зворотньо до нового класу явищ – не достатньо повно відображена. Водночас, саме ця проблема є ключовою для магістерського рівня, де формування дослідницьких компетентностей передбачає не просте засвоєння теорем, а здатність самостійно конструювати відповідність між математичною структурою та предметним контекстом. Невирішеними, зокрема, залишаються питання послідовності введення понять (від конкретних моделей до загального визначення або навпаки), організації міждисциплінарних наскрізних задач, що органічно поєднують кілька прикладних контекстів, а також розробки системи оцінювання, яка перевіряла б концептуальне розуміння структури позитивних систем, а не технічне відтворення доведень. Саме зазначені аспекти становлять предмет дослідження, що викладається у даній роботі.

Формулювання мети статті (постановка завдання). Метою статті є розробка та теоретичне обґрунтування цілісних методичних засад викладання дисципліни «Математичне моделювання позитивних систем» для

магістрів спеціальності «Прикладна математика», що охоплюють: принципи структурування навчального матеріалу як систематизованого наукового знання, а не набору рецептурних прийомів; обґрунтування послідовності введення ключових математичних понять з урахуванням їх прикладного змісту; опис методів організації навчального процесу, які забезпечують формування дослідницьких компетентностей; визначення змістових орієнтирів для системи оцінювання. Досягнення поставленої мети здійснюється через поєднання аналізу математичної структури дисципліни та апробованих педагогічних стратегій активного та проблемно-орієнтованого навчання.

Теоретичний каркас дисципліни: від невід’ємності явища до алгебраїчної структури. Пропонована в роботі методична концепція будується навколо ключового твердження: поняття позитивної системи – це не технічне обмеження, накладене на динамічний об’єкт ззовні, а внутрішня структурна властивість, породжена природою досліджуваного явища. Виходячи з цього, викладання курсу починається не з визначення, а з феноменологічного спостереження: концентрація препарату у плазмі крові, частка інфікованих осіб у популяції, обсяг промислового виробництва у розрізі галузей – усі ці величини є апіорі невід’ємними, і ця невід’ємність є не граничною умовою задачі, а фізичним смыслом змінної стану.

Наступний крок – перехід від феноменологічного спостереження до алгебраїчної характеристики. Для неперервних у часі лінійних систем вигляду

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

де $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор стану; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор керуючих входів; $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ – вектор виходів; позитивність означає: для будь-якого $\mathbf{x}_0 \geq 0$ та $\mathbf{u}(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ виконується $\mathbf{x}(t) \geq 0$ для всіх $t \geq 0$. Знак нерівності тут розуміється поелементно. Центральним в такому випадку є питання про те, яка

алгебраїчна умова на матрицю A є рівносильною позитивності системи. Відповідь на поставлене питання дає наступна теорема, яка виступає опорним теоретичним результатом курсу.

Теорема 1 (критерій позитивності [12]). Система (1) є позитивною тоді і тільки тоді, коли A є матрицею Метцлера, тобто виконується умова

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad (2)$$

а матриці B та C є невід'ємними: $B \geq 0, C \geq 0$.

Умова (2) має прозорий динамічний зміст: позадіагональні елементи матриці A є коефіцієнтами потоків між компартментами системи, невід'ємність цих коефіцієнтів означає, що жодна змінна стану не може отримати від'ємний приріст від іншої. Саме такий зв'язок між структурою матриці та фізичним змістом коефіцієнтів є тим «семантичним ключем», навколо якого будується методика пояснення.

Для дискретних у часі позитивних систем вигляду

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

відповідна умова є елементарнішою: система є позитивною тоді і тільки тоді, коли $A \geq 0$ (всі елементи невід'ємні) та $B \geq 0$ [12, 13]. Порівняння умов для неперервного та дискретного часу є важливим методичним кроком, що ілюструє нетривіальність переходу між часовими шкалами та дозволяє студентам самостійно реконструювати аргументацію через формулу Пеано-Бейкера-Кемпбелла.

Алгебраїчний фундамент: теорема Перрона-Фробеніуса та її методичне значення. Теорема Перрона-Фробеніуса є центральним алгебраїчним результатом, без якого розуміння позитивних систем залишається на описовому рівні. У навчальному контексті її значення полягає насамперед в тому, що вона встановлює зв'язок між структурною властивістю матриці (невід'ємністю або незвідністю) та якісними

характеристиками її спектра, що не має аналогу у загальній матричній теорії. Розглянемо формулювання зазначеної теореми.

Теорема 2 (Перрона-Фробеніуса, [12]). Нехай $A \geq 0$ – незвідна невід’ємна матриця. Тоді:

- спектральний радіус $\rho(A) = \max\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(A)\}$ є власним значенням матриці A ;
- $\rho(A)$ є простим (алгебраїчна кратність дорівнює 1), а відповідний власний вектор $v^* > 0$ є строго додатним;
- $\rho(A)$ є єдиним власним значенням матриці A з модулем, що дорівнює $\rho(A)$.

Спектральний радіус $\rho(A)$ у цьому контексті відіграє роль «природного темпу» системи: для дискретних позитивних систем умова стійкості рівносильна умові $\rho(A) < 1$, а для неперервних – умові $\lambda^*(A) < 0$, де $\lambda^*(A) = \max\{\text{Re}(\lambda): \lambda \in \sigma(A)\}$ є домінуючим власним значенням. Важливо, що для матриці Метцлера домінуюче власне значення завжди є дійсним. Саме вказана «спрошеність» спектральної картини позитивних систем і є причиною їх аналітичної привабливості у прикладних задачах.

З педагогічної точки зору теорема Перрона-Фробеніуса вводиться після того, як студенти вже розібрали кілька конкретних прикладів та виявили емпіричну закономірність: «у всіх маких матрицях найбільше за модулем власне значення є дійсним та визначає довгостроковий стан системи». Лише після такого індуктивного підготування формальне формулювання теореми сприймається не як довільне твердження, а як теоретичне пояснення вже усвідомленого факту, що є принципом, що відповідає рекомендаціям проблемно-орієнтованого навчання [14].

Компартментні моделі та базове репродуктивне число. Компартментні моделі є природною точкою входу для демонстрації позитивних систем у дії, оскільки вся їх математична структура є

безпосереднім відображенням закону збереження: потоки між компартментами є невід'ємними, а загальна «маса» (сума станів) є консервативною або спадаючою величиною. Модель SIR [15] є канонічним прикладом та служить у курсі точкою вертикальної інтеграції – до неї повертаються на всіх трьох фазах навчання з різних теоретичних перспектив:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I, \quad (4)$$

де S , I , R – чисельності сприйнятливих, інфікованих та одужалих осіб відповідно; $N = S + I + R = \text{const}$, $\beta > 0$ – коефіцієнт передачі; $\gamma > 0$ – коефіцієнт одужання.

З огляду на структуру правих частин (4), ортант $\{S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}$ є позитивно інваріантним, який студенти на першій фазі курсу перевіряють через безпосередній аналіз знаків похідних на межах ортанта. Центральним питанням аналізу в такому випадку виступає питання про те, за якої умови мала початкова хвиля інфекції здатна поширитися. Відповідь на поставлене питання дає базове репродуктивне число, яке для моделі (4) обчислюється у вигляді

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (5)$$

При $\mathcal{R}_0 > 1$ рівновага «без захворювання» $E_0 = (N, 0, 0)$ є нестійкою та спостерігається епідемічний спалах; при $\mathcal{R}_0 \leq 1$ – стійкою. При цьому, методично важливо, що для складніших компартментних моделей (SEIR, SEIRV тощо) безпосереднє обчислення $\mathcal{R}_0$ за співвідношенням (5) є неможливим, для цього використовується метод матриці наступного покоління [16], за яким число $\mathcal{R}_0$ визначається у вигляді

$$\mathcal{R}_0 = \rho(\mathbf{FV}^{-1}), \quad (6)$$

де $\mathbf{F}$ – матриця нових інфекцій; $\mathbf{V}$ – матриця переходів між класами (невід'ємна); $\rho(\cdot)$ – спектральний радіус. Таким чином, обчислення числа $\mathcal{R}_0$

зводиться до обчислення спектрального радіуса добутку двох невід'ємних матриць. Саме при такому обчисленні вивчена студентами раніше теорема Перрона-Фробеніуса набуває прямого прикладного змісту. Зазначений підхід, коли теоретичний результат першої фази розкриває прикладну задачу іншої, є спроектованим методичним прийомом, а не випадковим збігом.

Модель Леонтьєва як позитивна алгебраїчна система. Другий основний прикладний контекст курсу – міжгалузевий баланс Леонтьєва – демонструє позитивні системи у статичному (рівноважному) алгебраїчному варіанті та забезпечує зв'язок між теорією та економіко-математичним моделюванням. Модель описує рівновагу n -галузевої економіки, де кожна галузь i виробляє валовий випуск x_i , частина якого споживається іншими галузями (проміжний попит), а частина – кінцевим споживачем (d_i) [12, 13]:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}, \quad A \geq 0, \quad \mathbf{d} \geq 0, \quad (7)$$

де $a_{ij} \geq 0$ – коефіцієнти прямих витрат (i -го продукту на одиницю j -го); A – матриця прямих витрат.

Рівняння (7) відповідає умові балансу «виробництво = проміжний попит + кінцевий попит». Розв'язок задачі балансу має вигляд

$$\mathbf{x}^* = (I - A)^{-1}\mathbf{d} = B\mathbf{d},$$

де $B = (I - A)^{-1}$ є матрицею повних витрат Леонтьєва.

Ключовим теоретичним результатом при цьому виступає умова, за якої $B \geq 0$, що гарантує економічну осмисленість розв'язку: збільшення кінцевого попиту на будь-який продукт не повинен спричиняти від'ємного рівноважного випуску. Це досягається тільки у випадку, коли матриця A є продуктивною: $\rho(A) < 1$ [13]. Більш загально, умова $B = (I - A)^{-1} \geq 0$ є характеристичною властивістю M -матриці – ще один зв'язок між загальною алгебраїчною теорією та конкретним прикладним об'єктом.

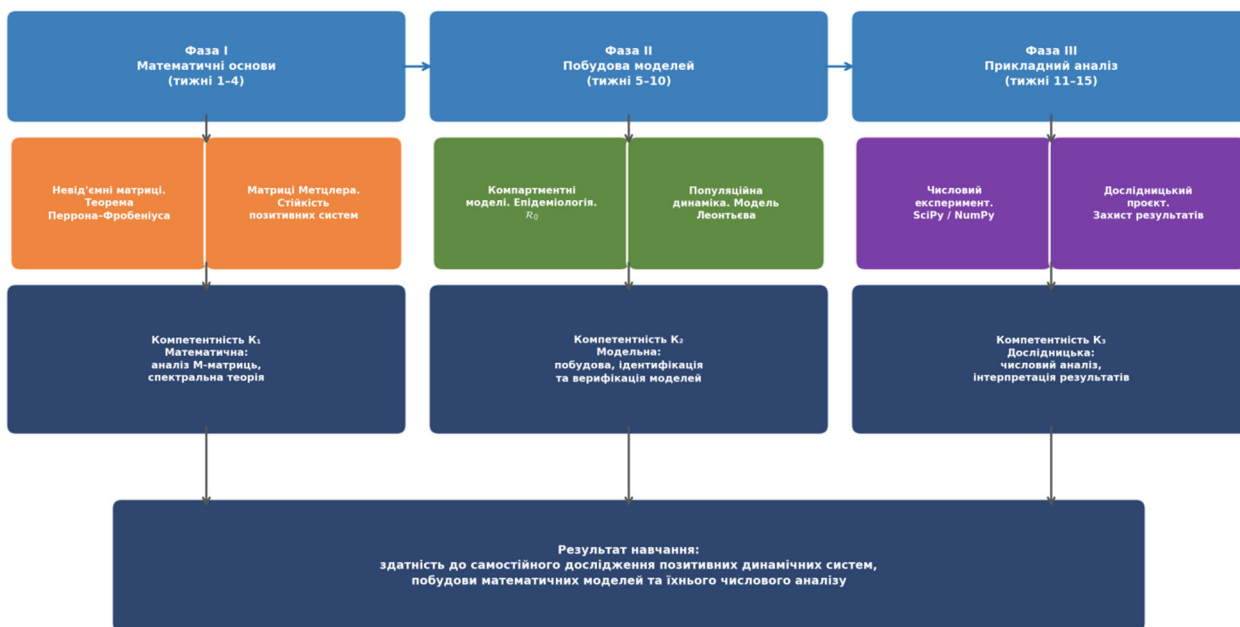
Методично показовим є те, що обидва основні прикладні контексти (компаративна епідеміологія та модель Леонтьєва) спираються на одну і ту

саму алгебраїчну структуру невід'ємної матриці, але реалізують її у принципово різних постановках: у першому випадку це динамічна система в часовій області, у другому – рівноважне лінійне рівняння. Усвідомлення студентами такої структурної єдності є одним з центральних освітніх результатів курсу.

Методика організації навчального процесу: трифазова структура. Запропонована методика організації курсу базується на трифазовій архітектурі, яка забезпечує поступальний перехід від абстрактного до прикладного та зворотньо до узагальнення (рис. 1). Така побудова відповідає принципу «спіральності», де ключові поняття розглядаються кілька разів на зростаючому рівні складності та абстракції.

Рисунок 1

Структурно-методичний каркас дисципліни «Математичне моделювання позитивних систем»



Джерело: власна розробка авторів

Фаза I (тижні 1-4) – математичні основи – присвячена формуванню алгебраїчного апарату: невід'ємні матриці, матриці Метцлера, теорема

Перрона-Фробеніуса, M -матриці, критерії позитивності систем. Характерною особливістю даної фази є те, що математичні об'єкти вводяться не через аксіоматичні визначення, а через числові спостереження: студентам пропонується порівняти поведінку траєкторій матричної диференціальної системи для матриць з різним знаком позадіагональних елементів та самостійно сформулювати гіпотезу про структурну умову позитивності. Зазначене реалізує дослідницький принцип: означення йде за відкриттям, а не передуює йому [17].

Фаза II (тижні 5-10) – побудова моделей – зосереджена на конкретних класах позитивних систем: SIR та узагальнені компартментні моделі, моделі популяційної динаміки, модель Леонтьєва, фармакокінетичні моделі. Кожна модель розглядається в єдиній методичній схемі: опис предметного явища та обґрунтування невід'ємності стану; побудова матриці системи та верифікація умови Метцлера або невід'ємності; аналіз рівноваги та стійкості через апарат фази I; числове моделювання з інтерпретацією результатів.

Фаза III (тижні 11-15) – прикладний аналіз – об'єднує набуті знання у дослідницькому проєкті. Студенти обирають з кількох запропонованих міждисциплінарних задач (або формулюють власну) та реалізують повний цикл математичного моделювання: побудова моделі, доведення або числова верифікація позитивності, аналіз стійкості, параметрична чутливість, обчислювальний експеримент та інтерпретація у предметних термінах.

Компетентнісний профіль та система оцінювання. Запропонована методика формує три взаємопов'язані компетентності. Математична компетентність (K_1) охоплює здатність аналізувати структуру матриці Метцлера, застосовувати теорему Перрон-Фробеніуса та M -матричні критерії до конкретних об'єктів. Модельна компетентність (K_2) полягає у здатності побудувати математичну модель реального позитивного явища: визначити змінні стану, встановити баланс потоків, обґрунтувати невід'ємність та

ідентифікувати параметри з доступних даних. Дослідницька компетентність (K_3) – здатність до самостійного числового та якісного аналізу позитивних систем, параметричної чутливості та інтерпретації отриманих результатів у предметних термінах. Система оцінювання проектується таким чином, щоб перевіряти насамперед компетентнісний рівень, а не технічне відтворення алгоритмів. Поточне оцінювання включає серію аналітичних завдань, де студент має самостійно перевірити умову Метцлера для нової матриці, обчислити $\mathcal{R}_0$ для нової компартментної моделі різними методами, захистити дослідницький проєкт з обов'язковою демонстрацією зв'язку між математичною структурою та предметним змістом обраної моделі. Підсумкове оцінювання ґрунтується на тестуванні за теоретичним матеріалом, вивченим впродовж курсу, та виконанням практичного завдання, аналогічного тим, що виконувались в межах практичних робіт за курсом. Такий підхід узгоджується з принципами конструктивного вирівнювання навчальних цілей, завдань та форм оцінювання.

Апробація методики та попередні результати. Представлена в роботі методика була реалізована у межах пілотного викладання дисципліни на кафедрі фундаментальної та прикладної математики ЗНУ. За результатами анонімного опитування після завершення курсу 87% студентів відзначили, що трифазова структура курсу полегшила розуміння зв'язку між абстрактним апаратом та конкретними моделями. Показово, що 73% студентів самостійно сформулювали в рамках захисту проєкту нетривіальну міждисциплінарну аналогію між компартментними та економічними моделями, що свідчить про формування K_2 на необхідному рівні. Порівняння якості дослідницьких проєктів з результатами попереднього навчального року, коли дисципліна викладалася за стандартним форматом без явної трифазової структури, показало зростання середнього балу за критерієм «концептуальна глибина аналізу» з 3.1 до 4.2 за п'ятибальною шкалою. При цьому, отримані кількісні

показники є попередніми та потребують верифікації на більшій вибірці, що становить перспективу подальших досліджень.

Висновки. Результати проведеного дослідження дозволяють стверджувати, що представлена в роботі методика викладання дисципліни «Математичне моделювання позитивних систем» будується не навколо передачі системи теорем, а навколо формування у студентів здатності самостійно виявляти алгебраїчну структуру в конкретному явищі та переносити її з одного предметного контексту до іншого. Така здатність є ключовою дослідницькою компетентністю магістерського рівня та не формується засобами стандартного лекційного викладу. Запропонована трифазова методична структура (математичні основи → побудова моделей → прикладний аналіз) забезпечує послідовну вертикальну інтеграцію знань та реалізує принцип спіральності: кожний ключовий математичний об'єкт з'являється в курсі щонайменше тричі в різних контекстах, утворюючи стійку концептуальну мережу. Аналіз SIR-моделі, моделі Леонтьєва та узагальнених компартментних систем у рамках єдиного математичного каркасу демонструє студентам структурну єдність позитивних систем як класу, незважаючи на різноманітність їх предметних інтерпретацій.

Список використаних джерел

1. Duan X., Jafarpour S., Bullo F. Graph-theoretic stability conditions for Metzler matrices and monotone systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2021. Vol. 59, No. 5. P. 3447–3471. DOI: 10.1137/20M131802X.
2. Krokavec D., Filasová A. On PID design constraints in relation to control of strictly Metzler linear MIMO systems. *Symmetry*. 2021. Vol. 13, No. 9. Art. 1589. DOI: 10.3390/sym13091589.

3. Krokavec D., Filasová A. Interval observers design for systems with ostensible Metzler system matrices. *Frontiers in Aerospace Engineering*. 2023. No. 2. Art. 1158718. DOI: 10.3389/fpace.2023.1158718.
4. Krokavec D., Filasová A. State estimation of positive switched interval systems with Metzler-Takagi-Sugeno fuzzy models. *Machines*. 2023. Vol. 11, No. 2. Art. 290. DOI: 10.3390/machines11020290.
5. Krokavec D., Filasová A. State control design of ostensible Metzler linear systems with unsigned input parameters. *Designs*. 2024. Vol. 8, No. 3. Art. 54. DOI: 10.3390/designs8030054.
6. Abreu Z., Cantin G., Silva C. J. Analysis of a COVID-19 compartmental model: a mathematical and computational approach. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2021. Vol. 18, No. 6. P. 7979–7998. DOI: 10.3934/mbe.2021396.
7. Al-arydah M. Mathematical modeling and optimal control for COVID-19 with population behavior. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2023. Vol. 46, No. 18. P. 19184–19198. DOI: 10.1002/mma.9619.
8. Cevikbas M., Kaiser G., Schukajlow S. A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educational Studies in Mathematics*. 2022. Vol. 109, No. 2. P. 205–236. DOI: 10.1007/s10649-021-10104-6.
9. Gerber S., Quarder J., Greefrath G., Siller H.-S. Promoting adaptive intervention competence for teaching simulations and mathematical modelling with digital tools. *Frontiers in Education*. 2023. Vol. 8. Art. 1141063. DOI: 10.3389/educ.2023.1141063.
10. Durandt R., Blum W., Lindl A. A mathematical modelling unit for first-year engineering students. *Modelling in Science Education and Learning*. 2022. Vol. 15, No.1. P. 77–92. DOI: 10.4995/msel.2022.16646.

11. Krokavec D., Filasová A. Linear matrix inequalities in fault detection filter design for linear ostensible Metzler systems. *Machines*. 2025. Vol. 13, No.1. Art. 46. DOI: 10.3390/machines13010046.
12. Farina L., Rinaldi S. *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. New York : Wiley-Interscience, 2000. 320 p. DOI: 10.1002/9781118033029.
13. Kaczorek T. *Positive 1D and 2D Systems*. London : Springer, 2002. 431 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0221-2.
14. Hmelo-Silver C. E. Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*. 2004. Vol. 16, No. 3. P. 235–266. DOI: 10.1023/B:EDPR.0000034022.16470.f3.
15. Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. Математичне моделювання епідеміологічно-економічної динаміки з нечіткою параметризацією: теоретичні засади, обчислювальна схема та планування експерименту. *Наука і техніка сьогодні*. 2026. № 4(58). С. 5030–5044. DOI: 10.52058/2786-6025-2026-4(58)-5030-5044.
16. van den Driessche P., Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*. 2002. Vol. 180, No. 1–2). P. 29–48. DOI: 10.1016/S0025-5564(02)00108-6.
17. Prince M. Does Active Learning Work? A Review of the Research. *Journal of Engineering Education*. 2004. Vol. 93, No.3. P. 223–231. DOI: 10.1002/j.2168-9830.2004.tb00809.x.